

Uitwerkingen Analytische meetkunde

1-1 Cartesische coördinaten

1. a. Omdat anders afstanden en hoeken niet meer hun ware lengte hebben, cirkels niet cirkelvormig zijn etc.

b. -

c. $|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$

d. $M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (2,5;2)$

2. $|AB| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$ en $M = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = (0;3,5)$

3. $|AB| = \sqrt{(20+10)^2 + (45-33)^2} = \sqrt{1044} = 6\sqrt{29}$ en
 $M = \left(\frac{-10+20}{2}, \frac{33+45}{2}\right) = (5,39)$

4. $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ en $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

5. a. $|MB| = \sqrt{(40 - 22,5)^2 + (45 - 33)^2} = \sqrt{222,5}$

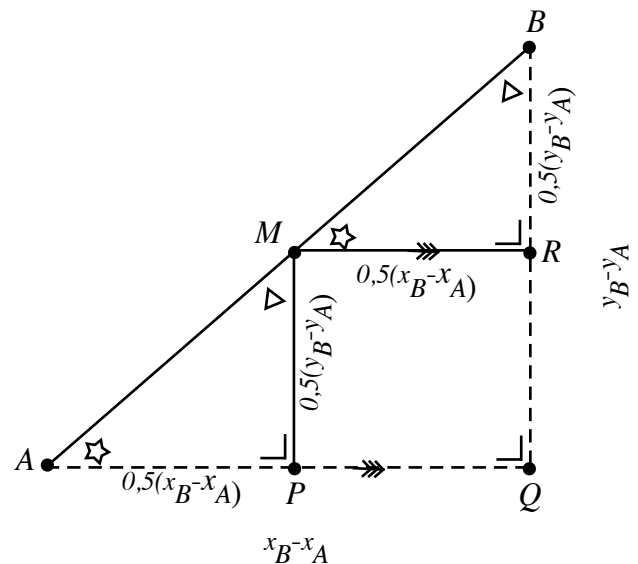
b. $M = \left(\frac{-50 + 80}{2}, \frac{120 - 60}{2}\right) = (15,30)$

$|MA| = \sqrt{(-50 - 15)^2 + (120 - 30)^2} = \sqrt{12325} = 5\sqrt{493}$

$|MB| = \sqrt{(80 - 15)^2 + (-60 - 30)^2} = \sqrt{12325} = 5\sqrt{493}$

$|MA| = |MB|$ dus M het midden is van AB

6. a. Als M het midden is van AB dan
 $\Delta APM = \Delta MRB$; drie gelijke hoeken en twee gelijke zijden dan is ook derde zijde gelijk.
 Zie tekening hiernaast $A(x_A, y_A)$



de x -coördinaat van M is dan

$$x_A + 0,5(x_B - x_A) = x_A + 0,5x_B - 0,5x_A = 0,5x_A + 0,5x_B = \frac{x_A + x_B}{2}$$

de x -coördinaat van M is dan

$$y_A + 0,5(y_B - y_A) = y_A + 0,5y_B - 0,5y_A = 0,5y_A + 0,5y_B = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Op dezelfde manier kan vanuit punt B geredeneerd worden.

b. Er geldt volgens de Stelling van Pythagoras $AQ^2 + QB^2 = AB^2$, dus

$$AB = \sqrt{AQ^2 + QB^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

7. Neem $A(0,0)$ en $P(x,y)$ met P op lijn l met $l: y = ax + b$ geldt dat $P(x, ax + b)$.

Voor M geldt dat $M(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ is, dus $M(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}b)$

Voor lijn geldt dat $rc = a$. Neem nu twee punten P op lijn l : $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$.

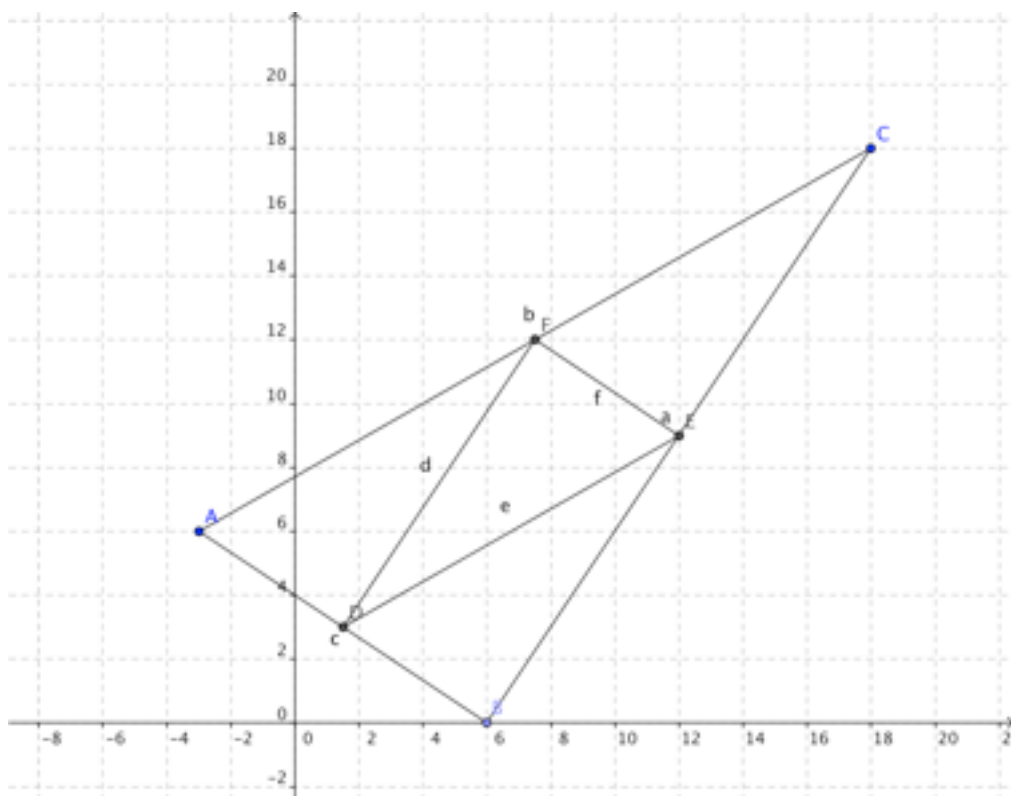
Voor de bijbehorende middens geldt: $M_1(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}y_1) = (\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}b)$ en

$M_2(\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}y_2) = (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}ax_2 + \frac{1}{2}b)$, de rc van de lijn door M_1 en M_2 is

$$\frac{(\frac{1}{2}ax_2 + \frac{1}{2}b) - (\frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}b)}{\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1} = \frac{\frac{1}{2}ax_2 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}ax_1 - \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1} = \frac{\frac{1}{2}ax_2 - \frac{1}{2}ax_1}{\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1} = \frac{\frac{1}{2}a(x_2 - x_1)}{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)} = a$$

dus zijn beide lijnen evenwijdig.

8.



$$\begin{aligned} \text{a. } |AB| &= \sqrt{(6 - -3)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \\ |BC| &= \sqrt{(18 - 6)^2 + (18 - 0)^2} = \sqrt{468} = 6\sqrt{13} \\ |AC| &= \sqrt{(18 - -3)^2 + (18 - 6)^2} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65} \end{aligned}$$

De wortels zijn vereenvoudigd. Niet handig voor onderdeel b. Wel kun je zo zien dat $BC = 2 \cdot AB$ en wellicht dat $AC = \sqrt{5} \cdot AB$.

- b. Door de stelling van Pythagoras $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ te gebruiken kan worden bewezen dat het een rechthoekige driehoek is. Klopt de formule, dan is het een rechthoekige driehoek. In dit geval klopt de formule omdat $117 + 468 = 585$ correct is. Kijk je naar de vereenvoudigde lengtes dan zie je dat de zijden zich verhouden als $1 - 2 - \sqrt{5}$, ook deze verhouding voldoet aan de stelling van Pythagoras.

$$\text{c. } D = \left(\frac{-3+6}{2}, \frac{6+0}{2} \right) = (1\frac{1}{2}, 3)$$

$$E = \left(\frac{6+18}{2}, \frac{0+18}{2} \right) = (12, 9)$$

$$F = \left(\frac{-3+18}{2}, \frac{6+18}{2} \right) = (7\frac{1}{2}, 12)$$

$$\begin{aligned} \text{d. } |DE| &= \sqrt{(12 - 1\frac{1}{2})^2 + (9 - 3)^2} = \sqrt{146\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{65} \\ |EF| &= \sqrt{(7\frac{1}{2} - 12)^2 + (12 - 9)^2} = \sqrt{29\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{13} \\ |DF| &= \sqrt{(7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2})^2 + (12 - 3)^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \end{aligned}$$

De stelling van Pythagoras $|EF|^2 + |DF|^2 = |DE|^2$ geldt immers $117 + 29\frac{1}{4} = 146\frac{1}{4}$ en dus is $\triangle DEF$ rechthoekig.

9. Zie het antwoord bij Voorbeeld 3.

$$\text{10. a. } |AB| = \sqrt{(106 - -11)^2 + (133 - 23)^2} = \sqrt{25789}$$

$$M = \left(\frac{-11+106}{2}, \frac{223-133}{2} \right) = (47\frac{1}{2}, 78)$$

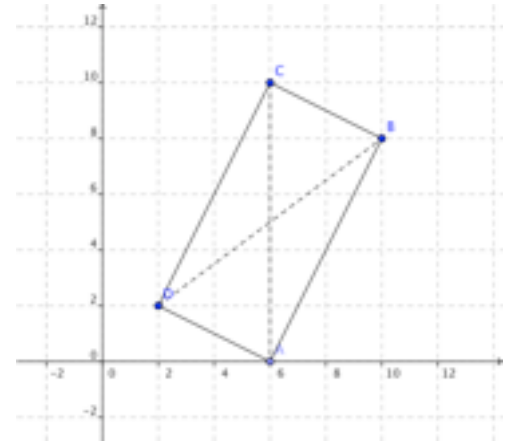
$$\text{b. } B = \left(\frac{-11+x_c}{2}, \frac{23-y_c}{2} \right) = (106, 133)$$

$$106 = \frac{-11+x_c}{2} \Rightarrow x_c = 223$$

$$133 = \frac{-11+y_c}{2} \Rightarrow y_c = 243$$

$$C(x_c, y_c) = (223, 243)$$

11. a. $|AB| = \sqrt{(10-6)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
 $|CD| = \sqrt{(2-6)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
 $|BC| = \sqrt{(6-10)^2 + (10-8)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $|AD| = \sqrt{(2-6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 Dus $|AB| = |CD|$ en $|BC| = |AD|$
 $|AC| = \sqrt{(6-6)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{100} = 10$
 $|BD| = \sqrt{(2-10)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{100} = 10$



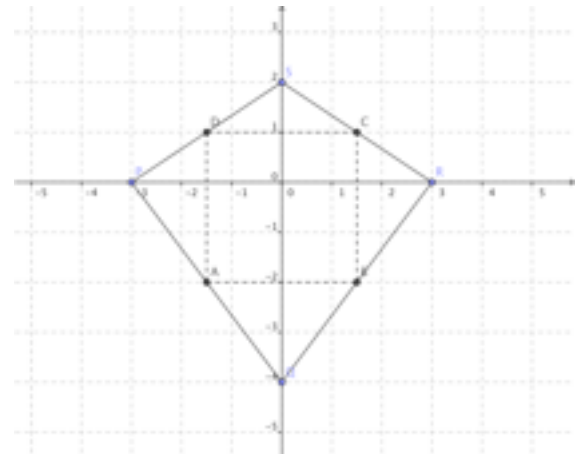
De diagonalen AC en BD zijn ook even lang en de stelling van Pythagoras geldt in $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, $\triangle ABD$ en $\triangle ACD$ dus zijn alle hoeken recht.

b. S ligt halverwege AC en heeft dus de coördinaten zijn $S_{AC} = \left(\frac{6+6}{2}, \frac{0+10}{2}\right) = (6,5)$

S ligt halverwege BD en heeft dus de coördinaten zijn $S_{AC} = \left(\frac{10+2}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (6,5)$

c. Oppervlakte $\triangle ABS = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10$

12. a. Een vlieger heeft twee diagonalen die loodrecht op elkaar staan. De kortste diagonaal wordt door de langste middendoor gedeeld (de vlieger is lijnsymmetrisch). Een vlieger twee paar gelijke aanliggende zijden.



- b. De diagonalen van een vlieger staan loodrecht op elkaar.

c. $A = \left(\frac{-3+0}{2}, \frac{0+-4}{2}\right) = (-1\frac{1}{2}, -2)$

$B = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{-4+0}{2}\right) = (1\frac{1}{2}, -2)$

$C = \left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1\frac{1}{2}, 1)$

$D = \left(\frac{0+-3}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (-1\frac{1}{2}, 1)$

- d. Uit tekening en uit coördinaten van A, B, C , en D kun je opmaken dat AB en CD horizontale lijnstukken zijn en BC en AD verticale lijnstukken. $ABCD$ is een rechthoek (vierkant)

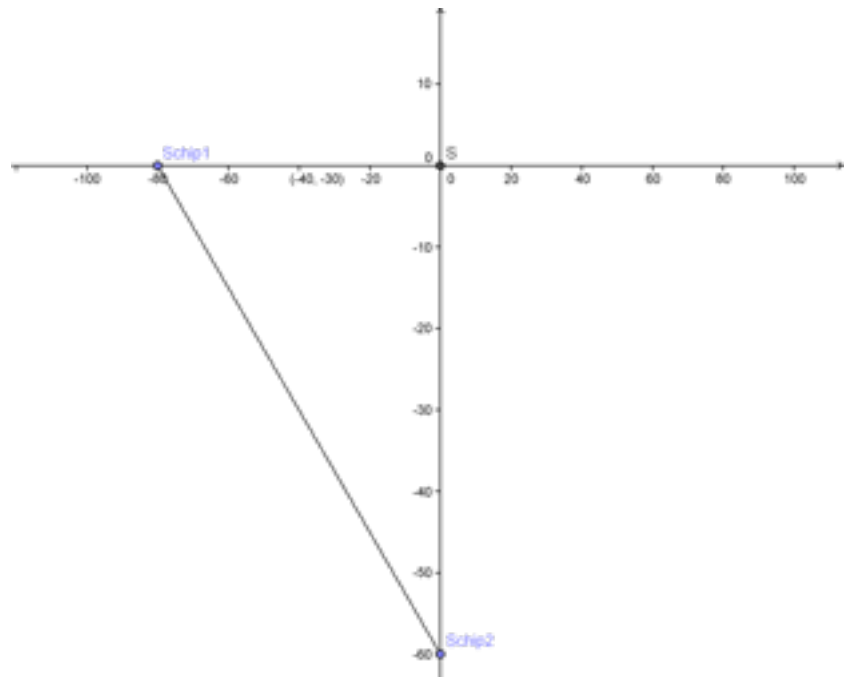
13. Noem a de afstand tussen schip 1 en schip 2.
Dan geldt volgens de stelling van Pythagoras dat:

$$a = \sqrt{80 - 20t)^2 + (60 - 10t)^2}$$

Zet deze functie in je GR en bereken het minimum bij window-instellingen bijv.

$$[0,10] \times [0,100]$$

De kleinste afstand is ongeveer 17,89 km voor $t \approx 4,4$.



14. a. $|PQ| = \sqrt{(0 - -120)^2 + (12 - -35)^2} = \sqrt{16609} \approx 128,88$
b. $M = \left(\frac{-120 + 0}{2}, \frac{-35 + 12}{2} \right) = (-60, -11\frac{1}{2})$
 $|OM| = \sqrt{(-60 + 0)^2 + (-11\frac{1}{2} + 0)^2} = \sqrt{3732,25} \approx 61,09$

15. a. Zie tekening hiernaast.

$$P = \left(\frac{-3 + 0}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right) = (-1\frac{1}{2}, 2)$$

$$Q = \left(\frac{3 + 0}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right) = (1\frac{1}{2}, 2)$$

neem $T(1\frac{1}{2}, 0)$

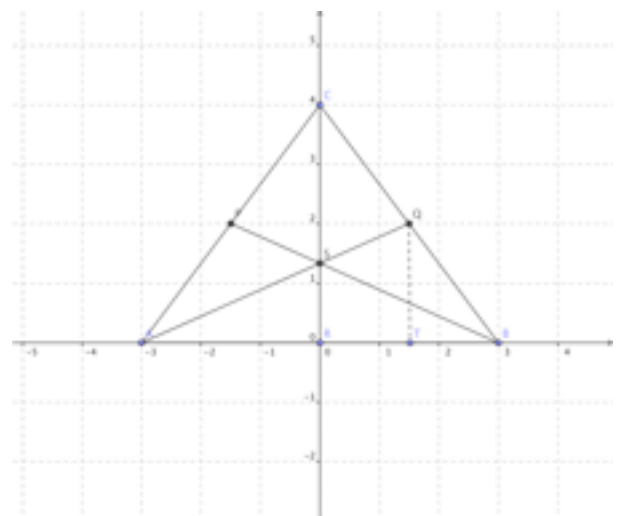
$\triangle ARS \sim \triangle ATQ$ (gelijkvormige driehoeken)

$AR = 3$ en $AT = 4,5$, Dus is $AS = \frac{2}{3} \cdot AQ$

analoog: neem $U(-1\frac{1}{2}, 0)$

$\triangle BRS \sim \triangle BUP$ (gelijkvormige driehoeken)

$BR = 3$ en $BU = 4,5$, dus is $BS = \frac{2}{3} \cdot BP$ (maak verhoudingsschema's)



b. $P = \left(\frac{-c+0}{2}, \frac{0+h}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}h \right)$

$Q = \left(\frac{c+0}{2}, \frac{0+h}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}h \right)$

neem $T\left(\frac{1}{2}c, 0\right)$

QT is middenparallel¹ in $\triangle BRC$

$\triangle ARS \sim \triangle ATQ$ (gelijkvormige driehoeken)

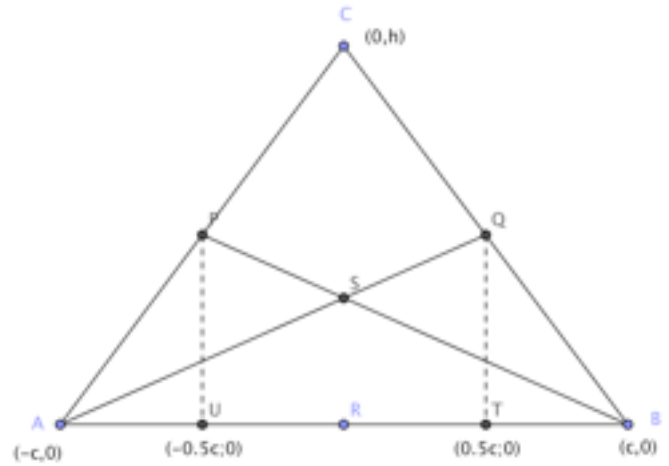
$AR = c$ en $AT = 1,5c$, dus is $AS = \frac{2}{3} \cdot AQ$

analoog: neem $U\left(-\frac{1}{2}c, 0\right)$

UP is middenparallel in $\triangle ARC$

$\triangle BRS \sim \triangle BUP$ (gelijkvormige driehoeken)

$BR = c$ en $BU = 1,5c$, dus is $BS = \frac{2}{3} \cdot BP$ (maak verhoudingsschema's)



¹ De middenparallel van een driehoek is een lijnstuk dat loopt van het midden van de ene zijde naar het midden van een tweede zijde.

Eigenschappen:

de middenparallel is evenwijdig is aan de derde zijde

de lengte van de middenparallel is precies de helft is van de lengte van die derde zijde