PROJECT

Wiskundige vaardigheden op maat

LEERTAKEN VERSIE **C**

- Procenten
- Groei
- Exponentiële verbanden
- Vergelijkingen bij groei

Procenten - C

Inleiding

De groei van de bevolking gaat meestal niet elk jaar met hetzelfde aantal. Want hoe meer mensen er al zijn, hoe meer kinderen er zullen worden geboren.
Het aantal werkende kinderen in een ontwikkelingsland groeit ook vaak niet gelijkmatig. Want hoe meer kinderen er bij komen, hoe groter het aantal dat kinderarbeid moet verrichten.
In beide gevallen hangt de groei af van het aantal dat er al is. Het is vaak een vast deel van, een vast percentage van de populatie.

Inhoudsopgave

Wat moet je aan het eind kennen en kunnen

- de begrippen "procent" en "percentage" en werken met procenten;
- de uitkomst berekenen als een getal met een percentage wordt verhoogd of verlaagd;
- het percentage erbij of eraf berekenen;
- in praktische situaties waarin procenten voorkomen een geschikte rekenmethode kiezen.

Procenten - C

1.1 Werken met procenten

1 Je weet: $1\% = 1$ honderdste $= \frac{1}{100} = 0{,}01$.
Dus is: $4\% = 4$ honderdste $= \frac{4}{100} = 0{,}04$.
a En dus is: $12\% =$ ...
b En dus is: $37{,}5\% =$ ...
c En ook is: $70\% =$ ...

2 Neem aan dat je 8% van je zakgeld aan snoep besteedt. En dat je zakgeld € 25,– per maand bedraagt.
a Vul in: $8\% = \frac{8}{100} =$
b Je spaart 30% van je zakgeld elke maand. Bereken hoeveel dat is.

THEORIE

Rekenen met procenten

Procent betekent **per honderd***.*
$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$
$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}30$
En ook:
15 *van de* 40 *is* $\frac{15}{40} = 0{,}375 = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\%$
Een verhouding kun je opschrijven als een breuk of in **procenten***, dus als een* **percentage***.*
Je kunt 24% *van €* 60*,– zo berekenen:*

$$24\% = \frac{24}{100} = 0{,}24 \quad \text{dus :} \quad 24\% \text{ van } 60 = 0{,}24 \times 60 = 14{,}4$$

Dus 24% *van €* 60*,– is €* $14{,}40$*.*

3 Uit een landelijk onderzoek is naar voren gekomen, dat een gemiddeld gezin een jaarinkomen van € 30.000,– besteedt als in de tabel hieronder. Bereken hoeveel geld het gezin gemiddeld uitgeeft aan elk van deze categorieën.

woonlasten:	20%	....
belasting:	42%	....
voeding:	17%	....
kleding:	5%	....
auto:	13%	....
overigen:	3%	....
	100%	

Procenten - C

4 Een klas van 28 leerlingen heeft een wiskundetoets gemaakt. 11% van de leerlingen had een onvoldoende.

a Bereken het aantal leerlingen dat een onvoldoende haalde.

b Met welke vermenigvuldiging kun je het antwoord op a in één keer berekenen?

5 Van een ijsberg steekt maar een klein gedeelte boven water uit. De verhouding tussen het gedeelte van de ijsberg dat zich boven water bevindt en het gedeelte dat zich onder water bevindt is $1 : 7$. IJsbergen kunnen daarom ook midden op de Noord-Atlantische oceaan op grote diepte stranden. Deze ijsberg heeft een volume van 900.000 m^3 .

a $1 : 7$ komt overeen met $12{,}5\%$ van het totaal. Leg dat uit.

b Bereken het aantal kubieke meters van de ijsberg dat zich onder water bevindt.

6 In een bepaald jaar ging 84% van alle 16 miljoen Nederlanders op vakantie. 75% daarvan ging naar het buitenland.

a Hoeveel Nederlanders gingen er dat jaar naar het buitenland?

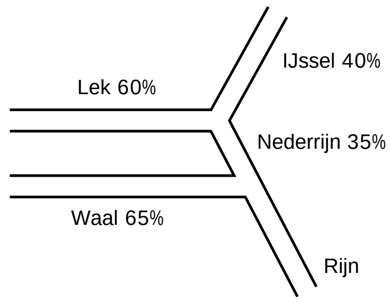
b Hoeveel procent van alle Nederlanders ging naar het buitenland op vakantie?

c Ongeveer 16% van alle Nederlanders die naar het buitenland op vakantie gingen, verbleven dat jaar in Skandinavië. Hoeveel mensen waren dat?

7 Het water uit de Rijn verspreidt zich als het Nederland binnenkomt over meerdere rivierarmen. In het plaatje kun je zien hoe het water zich verdeelt.

a Hoeveel procent van het water komt in het IJsselmeer terecht? Schrijf de berekening op.

b Hoeveel procent van het water komt via de Lek in de Noordzee terecht?



Dit moet je kunnen.

8 $6{,}5\%$ van alle 16 miljoen Nederlanders heeft op zeker moment de griep.
Hoeveel Nederlanders zijn dat?

9 8 van de 26 leerlingen in deze klas draagt een bril.
Hoeveel procent is dat? (Tot op één decimaal nauwkeurig.)

1.2 Procenten erbij of eraf

10 Een rijwielhandel geeft tijdens de feestweek 40% korting. Ze hebben een bromfiets van € 1600,– te koop. De korting gaat er nog af!
- a Op hoeveel procent stel je de oude prijs?
- b Hoeveel procent is de nieuwe prijs als er 40% korting wordt gegeven?
- c Je weet nu hoeveel procent van de prijs je nog moet betalen.
  Met welk getal moet je de prijs dus nog vermenigvuldigen?
- d Wat is nu de prijs van de bromfiets die jij moet betalen, als er 40% korting op wordt gegeven?
- e Bereken op dezelfde manier de nieuwe prijs voor een scooter van € 1800,–.

THEORIE

Procenten erbij, procenten eraf

Een televisie van € 800,– is in vier jaar tijd $12{,}5\%$ duurder geworden.
Wat is de nieuwe prijs?

De oude prijs is 100%.
De nieuwe prijs $100\% + 12{,}5\% = 112{,}5\%$.
De nieuwe prijs is $112{,}5\%$ van $800 = 1{,}125 \times 800 = 900$

Het aantal werklozen is dit jaar met $4{,}3\%$ *gedaald. Vorig jaar waren er nog* 420.000 *werklozen.*
Hoeveel zijn er dus aan het eind van dit jaar?

Het aantal van vorig jaar is 100%.
Het aantal van dit jaar is $100\% - 4{,}3\% = 95{,}7\%$.
Het nieuwe aantal is $95{,}7\%$ van $420.000 = 0{,}957 \times 420.000 = 401.940$
Eind van dit jaar zijn er dus ongeveer 402.000 *werklozen.*

11 Je weet dat $15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$.
- a Je krijgt 15% korting op een artikel van € 80,–. Waarom vind je de prijs die je moet betalen door $0{,}85 \times 80$ te berekenen?
- b Een artikel kost € 75,–. Er wordt 12% korting gegeven. Bereken de nieuwe prijs. Schrijf je berekening op.
- c Een artikel kost € 103,–. Deze prijs wordt verhoogd met 18%. Bereken de prijs die je moet betalen. Schrijf je berekening op.
- d Je hebt op 1 januari 2000 een bedrag van € 1000,– op de bank gezet en je krijgt 8% rente per jaar. Hoeveel is dat bedrag op 1 januari 2001 dan geworden? En op 1 januari 2002?

12 Ineke is met haar vriendin Els aan het winkelen. Op een gegeven moment komen ze langs een winkel met enorme aanbiedingen. Ze lopen de winkel binnen.

Bij aankoop van 2 spijkerbroeken betaalt u voor de **tweede broek** slechts **60% van de prijs**.

a Ineke ziet een trui van € $49{,}98$. Wat kost de trui met 25% korting? Schrijf je berekening op.

b Els koopt 2 spijkerbroeken die elk zonder korting € $51{,}75$ kosten. Hoeveel moet Els voor beide broeken samen betalen? Schrijf je berekening op.

c Els ziet een blouse waarop 20% korting wordt gegeven. De oude prijs van € $33{,}50$ en de nieuwe prijs van € 27,– staan er op. Ze vraagt zich af, of de nieuwe prijs wel klopt met de korting. Reken na of dit zo is.

13 Stel je voor dat je op 1 januari 2000 een bedrag van € 1000,– op de bank op een rekening hebt gezet. Je doet er verder niets mee, je haalt er geen geld van af en je doet er ook niets bij. Maar, de bank geeft elk jaar 5% rente over het bedrag dat op die rekening staat.

a Hoeveel geld heb je dan op 1 januari 2001?

b En op 1 januari 2002? Licht toe wat dit plaatje van het venster van een rekenmachine met het antwoord te maken heeft.

```
Ans*1.05
          1102.5
```

c En op 1 januari 2010?

d Na hoeveel jaar is dit kapitaal meer dan verdubbeld?

14 Een rechthoekig naambordje is 50 cm bij 90 cm en gemaakt van perspex. In de zon wil perspex nog wel eens uitzetten, zowel in de lengte als in de breedte ongeveer $0{,}2\%$.

a Hoe lang en hoe breed wordt dit bord na een zonnige dag?

b Wordt de oppervlakte van het bord ook $0{,}2\%$ groter? Verklaar je antwoord.

15 Als je van een bepaald getal eerst 10% afhaalt en dan bij de uitkomst weer 10% bij doet, heb je dan het oorspronkelijke getal weer terug? Verklaar je antwoord.

Dit moet je kunnen.

16 Vorig jaar gingen er 385.000 Nederlanders op vakantie in Skandinavië. Dit jaar zal dat aantal er naar verwachting $6{,}5\%$ hoger liggen. Hoeveel Nederlanders gaan er dit jaar naar Skandinavië?

17 Je krijgt maar liefst 25% korting op een jas van € 145,–.
Hoeveel moet je er nog voor betalen?

1.3 Hoeveel procent?

18 Een bepaald type brommer is in prijs gestegen van € 1600,– naar € 1800,–.
a Hoeveel is er bij de prijs gekomen?
b Het hoeveelste deel van de oorspronkelijke prijs is dat? Schrijf een breuk op, maar geef je antwoord ook in decimalen.
c Hoeveel procent is dat?

19 Kijk nog eens naar de vorige opgave. De prijsstijging kan worden omgerekend naar procenten.
Bereken $\frac{1800}{1600}$ en leg uit hoe je daarmee de procentuele prijsstijging kunt berekenen.

THEORIE

Procentuele toename, procentuele afname

Vorige week heeft een rijwielhandelaar 30 fietsen verkocht. Deze week is het aantal verkochte fietsen 36.
Met hoeveel procent is de verkoop van het aantal fietsen toegenomen?

Er zijn $36 - 30 = 6$ fietsen meer verkocht.
Dat is $\frac{6}{30}$ deel en $\frac{6}{30} = 0{,}20$.
De verkoop van het aantal fietsen is met 20% toegenomen.

Een broek van € 55,– kost met korting nog € $46{,}75$.
Hoeveel procent korting is dat?

Er is $55 - 46{,}75 = 8{,}25$ van de prijs af gegaan.
De prijs is dus met $\frac{8{,}25}{55}$ deel gedaald en $\frac{8{,}25}{55} = 0{,}15$.
Je kreeg dus 15% korting.

20 Een voetbalvereniging bestond in 2000 uit 340 leden.
Door een wervingscampagne bestond de vereniging in 2001 uit 400 leden.
Met hoeveel procent is het ledenaantal in 2001 toegenomen ten opzichte van dat in 2000?

21 Een kapper heeft een aantal maanden bijgehouden hoeveel potjes van een bepaalde gel voor welke prijs zijn verkocht.

	afzet	prijs per potje	totale omzet
januari	40	€ 2,–	....
februari	50	€ 1,75	....
maart	60	€ 1,80	....
april	55	€ 1,80	....

a Vul de tabel verder in. Omzet = afzet $\times$ prijs per potje
b In februari heeft de kapper 10 potjes meer verkocht dan in januari. Hoe groot is de procentuele toename?
c Is de omzet in februari ook toegenomen ten opzichte van januari? Zo ja met hoeveel procent?
d Met hoeveel procent is de afzet in april gestegen ten opzichte van januari?
e Met hoeveel procent is de afzet in april gedaald ten opzichte van maart?
f Hoeveel procent is de omzet in maart gestegen ten opzichte van februari?

22 Hans koopt in de uitverkoop een paar schoenen voor € 50,–. De schoenen kosten normaal € 59,75.
a Hoeveel procent korting heeft Hans gekregen?
b Hans koopt ook nog een wollen trui. De trui is afgeprijsd van € 43,50 naar € 25,–. Hoeveel procent van de oorspronkelijke prijs moet Hans betalen?

23 Het aantal koolwitjes (een vlindersoort) is in de laatste jaren in een natuurgebied nogal afgenomen.
Op 1 juni 2002 werden er nog 1200 koolwitjes geteld, op 1 juni 2003 waren dat er nog 1140 en op 1 juni 2004 nog maar 980.
a Met hoeveel procent is het aantal koolwitjes tussen 1 juni 2002 en 1 juni 2003 gedaald?
b Is het aantal koolwitjes in de periode van 1 juni 2003 en 1 juni 2004 met hetzelfde percentage gedaald? Licht je antwoord toe.

Dit moet je kunnen.

24 Vorig jaar gingen er 115.000 Nederlanders op vakantie in Zweden. Dit jaar zijn dat er 132.000.
Hoeveel % meer is dat?

25 Je betaalt voor een trui van € 45,– in de uitverkoop nog € 40,–.
Hoeveel procent korting is dat?

1.4 Terugrekenen met procenten

26 Een bepaald type brommer kost met 15% korting nog € 1600,–.

a Hoeveel % van de oorspronkelijk prijs is dat?

b Vul in:
oorspronkelijke prijs $\times$ .... $= 1600$

c Bereken nu de oorspronkelijke prijs. Schrijf je berekening op.

d Waarom kon je de oorspronkelijke prijs niet berekenen door bij de nieuwprijs van € 1600,– gewoon 15% op te tellen?

THEORIE

Procentuele toename, procentuele afname

De gemiddelde prijs van een koopwoning is dit jaar met $2{,}5\%$ *gestegen naar* € 220.000,–.
Hoeveel bedroeg die gemiddelde prijs een jaar eerder?

Oude prijs: 100%. *Nieuwe prijs (*€ 220.000,–*):* $102{,}5\%$.
Dus: oude prijs $\times 1{,}025 = 220.000$.
De oude prijs bedraagt $\frac{220.000}{1{,}025} \approx 214.634{,}15$, *dus ongeveer* € 214.600,–.

Een broek kost met korting van 15% *nog* € $46{,}75$.
Hoeveel kost de broek zonder korting?

€ $46{,}75$ *is* 85%.
Dus: prijs zonder korting $\times 0{,}85 = 46{,}75$.
De prijs zonder korting is $\frac{46{,}75}{0{,}85} \approx 55$, *dus* € 55,–.

27 Hermien deze maand heeft 35% van haar zakgeld gespaard. Dat is € $15{,}75$.
Hoeveel bedroeg haar zakgeld deze maand?

28 Het aantal inwoners van Nederland was in 2000 ongeveer $15{,}908$ miljoen. Het toename-percentage was toen al een tiental jaren ongeveer $0{,}06\%$ per jaar.

a Hoeveel inwoners had Nederland in 1999?

b Hoeveel inwoners had Nederland in 1998?

c Hoe zou je met deze gegevens kunnen berekenen hoe groot het aantal inwoners van Nederland in 1990 was?

29 Het is uitverkoop: op alle boeken 15% korting.

a Alper koopt een boek waarvoor hij nog € $38{,}25$ betaalt.
Hoeveel kost dit boek zonder korting?

b Annique heeft een boekenbon van € 20,–. Zij heeft daarmee een boek gekocht en moet nog € $9{,}75$ betalen.
Hoeveel kost dat boek zonder korting?

c Als de winkelier bij Annique eerst de boekenbon had verrekend en dan pas de korting, had ze teveel betaald.
Hoeveel?

30 De temperatuur van het water in een zwembad stijgt in de loop van een zonnige dag met 2% per uur.
Om 16:00 uur is de temperatuur van het water 23°C.
Hoeveel uur geleden was het nog onder de 21°C?
Licht je berekening toe.

Dit moet je kunnen.

31 De omzet van een bedrijf is dit jaar € 450 miljoen euro. Dat is 3% lager dan verleden jaar.
Hoeveel bedroeg de omzet toen?

32 Je betaalt voor een trui met 45% korting in de uitverkoop nog € 30,–.
Hoeveel bedraagt de prijs van deze trui zonder korting?

1.5 Toepassen

BTW

33 BTW is de afkorting voor Belasting Toegevoegde Waarde, een belasting die je moet betalen bij het kopen van bijna alle goederen. De BTW op een fiets die zonder BTW € 650,– moet kosten is 19%. Hoeveel betaal je voor die fiets inclusief BTW?

34 Op deze stereo-installatie krijg je 40% korting.
Je moet echter nog wel 19% BTW betalen. Er zijn nu twee mogelijkheden:
- de winkelier rekent eerst prijs met korting uit en dan telt hij de BTW er bij, of
- de winkelier telt eerst de BTW bij de prijs en berekent dan de korting.

Laat door berekening zien wat voor jou het voordeligst is.

35 Voor een koelkast van € 560,– betaal je inclusief BTW € 672,–.
a Hoeveel procent bedraagt de BTW dan?
b De handelaar geeft evenveel korting als de BTW bedraagt. Betaal je dan toch € 560,– voor de koelkast? Verklaar je antwoord.

36 Je ouders hebben een nieuwe auto gekocht. Hij kost € 25.700,– inclusief 19% BTW
Hoeveel bedraagt het totale bedrag aan BTW dat ze hebben betaald?

Groei - C

Inhoudsopgave

Inleiding

Bij lineaire groei neemt de hoeveelheid elke tijdseenheid met hetzelfde aantal toe. Bij procentuele (of exponentiële) groei neemt de hoeveelheid elke tijdseenheid niet met hetzelfde aantal, maar met hetzelfde percentage toe.
Bij de eerste soort groei hoort een rechte lijn als grafiek, bij procentuele groei is dat niet het geval.

Wat moet je aan het eind kennen en kunnen

- "lineaire groei" als gelijke toename en "lineaire afname" als gelijke afname;
- "procentuele groei" als toename met een vast percentage, "procentuele afname" als afname met een vast percentage;
- het begrip "groeifactor";
- van procentuele toename (afname) naar vermenigvuldigen met een groeifactor;
- van vermenigvuldigen met een groeifactor naar procentuele toename (afname).

Groei - C

LEERTAAK 2

2.1 Lineaire groei

1 Je hebt een telefoonabonnement van € 24,– per maand en je betaalt daar bovenop nog € $0{,}04$ per gesprek.

a Vul de tabel in:

aantal gesprekken a	0	100	200	300	400	500	600
kosten K (in €)	......	......	......	.....	......	......	......

b Welke regelmaat heeft deze tabel?

c Bij 1000 gesprekken per maand zijn de kosten:
$K =$ ...... $+$......$\cdot 1000 =$ ...... euro.

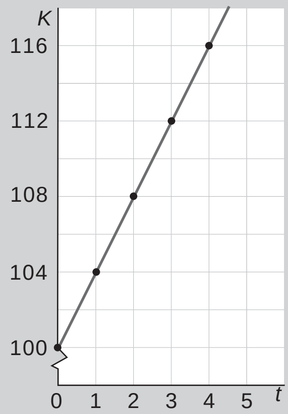
d Maak de bijpassende formule af: $K =$ ...... $+$ ...... $\cdot a$

THEORIE

Lineaire groei

Je hebt € 100,– en spaart er elke maand 4 euro bij.

tijd t (in maanden)	0	1	2	3	4	.....	20
kapitaal K (in €)	100	104	108	112	116	.....	180



Je kapitaal K groeit elke maand met 4 euro.
De grafiek van K is een rechte lijn. Daarom noem je dit **lineaire groei**.
Bij dit verband hoort de formule: $K = 100 + 4 \cdot t$.

Geef je daarentegen van de gespaarde € 100,– elke maand 5 euro uit, dan neemt het kapitaal elke maand met € 5,– af.
Er is dan sprake van **lineaire afname**.
Bij dit verband hoort als grafiek een rechte lijn en als formule:
$K = 100 - 5 \cdot t$.

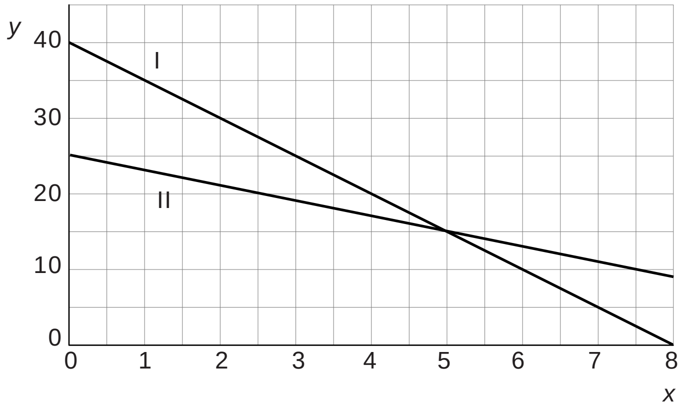
2 Voor het verbruik van water betaal je twee soorten kosten:
- een vast bedrag per jaar, het vastrecht;
- een bedrag per m^3 water die je verbruikt.

Die bedragen kunnen per gebied verschillend zijn. Bekijk de tabel.

verbruik in m^3	0	50	100	200	500
kosten in gebied A	€ 36	€ 126	€ 216	......	......
kosten in gebied B	€ 48	€ $125{,}50$	€ 203	......	......

a Waarom is in beide gevallen sprake van een lineair verband?
b Bereken hoeveel er bij beide bedrijven per m^3 moet worden betaald en vul de tabel verder in.
c Het aantal m^3 water dat je per jaar verbruikt noem je v. De kosten daarvoor (in €) noem je K. Stel voor elk van deze gebieden een formule op.
d Teken grafieken van de kosten per jaar in beide gebieden.
e Hoe kun je aan de formules zien in welk gebied je het goedkoopste uit bent als je veel water verbruikt?

3 Je ziet twee grafieken van het verband tussen y en x. Maak bij beide grafieken een formule.



4 Het gewicht van een kabel met haspel hangt af van de lengte van de kabel die er omheen gewonden is.
Zo'n grote kabelhaspel bevat nieuw 1000 m kabel. Hij weegt dan 800 kg. Als er 200 m kabel af is, weegt de haspel met kabel nog 650 kg. Hoeveel weegt een lege haspel? Geef een duidelijke berekening.

Dit moet je kunnen.

5 Soenita doet mee aan een sponsorloop. Sommige mensen betalen een vast bedrag. Anderen sponsoren elke km die ze loopt. Ze krijgt in het totaal een vast bedrag van € $22{,}50$ en nog € $4{,}50$ per gelopen kilometer.
a Hoeveel verdient ze als ze 6 km loopt?
b Welke formule geldt voor de verdiensten V? Noem het aantal gelopen kilometers a.

6 Bekijk de tabel.

x	0	1	2	3	4
y	60	57	54	51	48

a Hoeveel bedraagt y als $x = 20$?
b Welke formule geldt voor y?

2.2 Procentuele groei

7 Je zet € 100,– op de bank. Je krijgt 4% rente per jaar. Verder doe je niets met dat geld.
a Hoeveel is het saldo een jaar later geworden?
b Hoeveel is het saldo aan het einde van het tweede jaar?
c Hoe komt het dat er het tweede jaar meer geld bij is gekomen dan het eerste jaar?
d Hoeveel geld heb je aan het einde van het derde jaar?
e Met welk getal wordt je saldo elk jaar vermenigvuldigd?

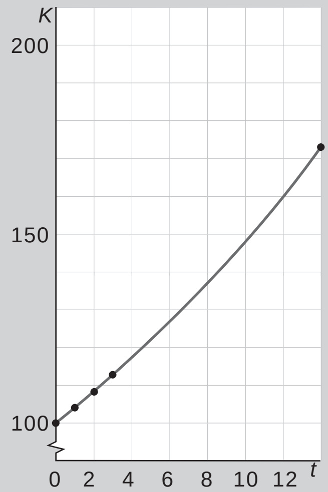
8 In een natuurgebied leven op 1 januari 2005 nog 500 olifanten. Het gaat niet goed met de olifanten: elk jaar neemt het aantal met 3% af.
a Hoeveel olifanten zijn er op 1 januari 2006?
a En hoeveel zullen er op 1 januari 2007 zijn?
c Als je de antwoorden van a en b vergelijkt, lijkt net alsof het aantal lineair afneemt. Is dat ook zo?
d Met welk getal wordt het aantal olifanten elk jaar vermenigvuldigd?

THEORIE

Procentuele toename en afname

In deze tabel neemt het kapitaal telkens met een rente van 4% per jaar toe.

tijd t (in jaren)	0	1	2	3	4	.....	20
kapitaal K (in €)	100	104	108,2	112,5	117,0	.....	210,7



Het kapitaal neemt niet met een vast bedrag toe, elk jaar wordt de toename iets hoger.
Elk jaar wordt het bedrag met 4% vermeerderd van 100% naar 104%.
Het wordt dus jaarlijks met $\frac{104}{100} = 1{,}04$ vermenigvuldigd.
Je spreekt van **procentuele toename**.
De bijbehorende grafiek is geen rechte lijn.

Als het bedrag elk jaar met 4% afneemt van 100% naar 96%, wordt het jaarlijks met $\frac{96}{100} = 0{,}96$ vermenigvuldigd.
Je spreekt dan van **procentuele afname**.

9 Een bedrijfje is gestart met een beginkapitaal van € 300.000. De winst bedraagt in het eerste jaar € 7500. De winst wordt bij het kapitaal gevoegd.
- a Hoeveel % winst heeft het bedrijf in het eerste jaar?
- b De winst wordt bij het bedrijfskapitaal gevoegd.
  Hoe groot is dit kapitaal na 2 jaar als de winst gelijk blijft aan € 7500?
- c Hoe groot is het kapitaal na 2 jaar als het winstpercentage gelijk blijft?
- d In welk van beide gevallen vermenigvuldig je het kapitaal jaarlijks met een vast getal? Welk getal?

10 De prijzen van levensmiddelen en luxe artikelen stijgen voortdurend. Daardoor wordt geld steeds minder waard. Het percentage waarmee de prijzen stijgen heet de prijsindex.
- a Hoeveel kost een artikel van € 1000,– na 1 jaar als de prijsindex $2{,}4\%$ bedraagt?
- b En hoeveel na 2 jaar met een gelijkblijvende prijsindex?
- c Wanneer zal de prijs over twee jaar hoger zijn: als de prijsindex per jaar $2{,}4\%$ is of als de prijsindex per twee jaar $4{,}8\%$ is?

11 Bedenk van de volgende situaties of sprake is van lineaire of procentuele toename of afname.
- a Het aantal vlinders neemt jaarlijks met $0{,}4\%$ af.
- b De afstand van een boot tot de kust neemt af met 25 mijl per uur.
- c Het weefsel van een wever groeit in elk uur met 3 cm.
- d De luchtdruk van de buitenlucht wordt deze periode dagelijks 5% meer.

12 Het aantal daklozen neemt elk jaar met 5% af. Dit jaar waren er 1500 daklozen.
- a Hoeveel daklozen zullen er volgend jaar zijn?
- b Hoeveel daklozen zijn er over 2 jaar?
- c Met welk getal wordt het aantal daklozen jaarlijks vermenigvuldigd?

Dit moet je kunnen.

13 Vorig jaar gingen er 85.000 Nederlanders op vakantie in Thailand. De komende jaren zal dat aantal naar verwachting telkens met $4{,}5\%$ stijgen.
- a Hoeveel Nederlanders gaan dit jaar op vakantie in Thailand?
- b Met welk getal wordt het aantal Nederlanders dat op vakantie gaat naar Thailand elk jaar vermenigvuldigd?

14 Het aantal koolwitjes in een bepaald natuurgebied daalt naar verwachting elk jaar met 3%. Dit jaar zijn er 240 geteld.
- a Hoeveel koolwitjes zullen er volgend jaar nog zijn?
- b Met welk getal wordt het aantal koolwitjes elk jaar vermenigvuldigd?

2.3 Groeifactor

15 Een bepaald type brommer is de laatste jaren steeds in prijs gestegen. Elk jaar met ongeveer 6% en dat zal nog wel even zo blijven doorgaan. Dit jaar is de adviesprijs € 1800,–.

a Met welk getal wordt de prijs elk jaar vermenigvuldigd?

b Dit getal heet de groeifactor per jaar.
Laat zien hoe je met behulp van die groeifactor de adviesprijs van volgend jaar kunt berekenen.

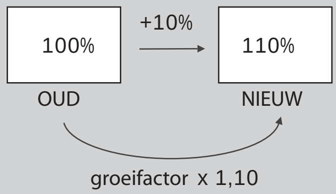
c En hoe bereken je met die groeifactor de adviesprijs over drie jaar?

THEORIE

Groeifactor

Bij procentuele groei (toename of afname) wordt per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dit getal noem je de **groeifactor** *per tijdseenheid.*
Bij een procentuele toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van $1{,}04$.
Bij een procentuele afname van 4% per jaar hoort een groeifactor van $0{,}96$.

Als je een kapitaal van € 100,– op de bank zet tegen 4% rente per jaar, groeit het jaarlijks met een groeifactor van $1{,}04$.
Na 5 jaar heb je dan $100 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 = 100 \cdot 1{,}04^5 \approx 121{,}67$ euro (zonder daar iets voor te hoeven doen).



16 Op 1 januari 2000 was de waarde van een huis € 190.000. In 2005 blijkt dat die waarde jaarlijks met $5{,}5\%$ is gestegen.

a Hoeveel bedroeg in die periode de groeifactor per jaar?

b Hoeveel was dit huis op 1 januari 2001 waard?

c Hoeveel was dit huis op 1 januari 2005 waard? Laat zien hoe je met de groeifactor werkt en rond af op gehele euro's.

17 Geef bij de volgende getallenseries aan of er sprake is van procentuele groei. Indien ja, geef dan de groeifactor.

a $9,\ 12,\ 15,\ 18$

b $9,\ 12,\ 16,\ 21\frac{1}{3}$

c $2,\ 10,\ 50,\ 250$

d $5{,}01;\ 5{,}02;\ 5{,}04;\ 5{,}08$

e $-0{,}1;\ -0{,}4;\ -1{,}6;\ -6{,}4$

18 Door energieverbruik voor verwarming en industrie wordt koolstofdioxide aan de lucht toegevoegd. Die toevoeging veroorzaakt het zogeheten broeikaseffect. Elke tien jaar neemt de hoeveelheid gas met 5% toe.
a Hoe groot is de groeifactor per tien jaar?
b In 1990 was de uitstoot 6090 Megaton. Hoe groot was de uitstoot in 2000?
c Hoe groot zal de uitstoot zijn in 2010?

19 Het aantal zwaluwen is in de laatste jaren in een natuurgebied nogal afgenomen. Op 1 juni 2002 werden er nog 1200 geteld, daarna was het aantal elk jaar 12% minder.
a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?
b Hoeveel zwaluwen zijn er op 1 juni 2010 nog over als deze procentuele afname doorzet?

20 In het begin van een griepepidemie groeit het aantal ziektegevallen procentueel. In een dichtbevolkte stad worden in de eerste week van februari 2346 ziektegevallen gemeld. Het toenamepercentage is 45% per week.
a Hoeveel bedraagt de groeifactor per week?
b Bereken het aantal ziektegevallen een week later.
c Bereken het aantal ziektegevallen in de eerste week van maart als de ziekte zich in dit tempo blijft uitbreiden.
d Waarom zal de groei zich niet in dit tempo blijven voortzetten?

Dit moet je kunnen.

21 Bacteriën vermenigvuldigen zich onder ideale omstandigheden heel snel. Soms zo snel dat het aantal in één uur verdubbelt. In een laboratorium onderzoekt men voedselbederf. Om 12:00 uur zitten er ongeveer 400 miljoen bacteriën in het voedsel.
a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?
b Hoeveel bacteriën zijn er om 17:00 uur?

22 In een plas water is een hoeveelheid gif terecht gekomen. Het gif verdwijnt langzaam uit het water. De hoeveelheid neemt af met 15% per dag.
a Hoeveel bedraagt de groeifactor per dag?
b Hoeveel gif is er nog over na tien dagen als de beginhoeveelheid 25 kg was?

2.4 Toepassingen

De berekeningen van Malthus

23 Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de negentiende eeuw in Londen. Hij was de eerste die de toename van de wereldbevolking bestudeerde. Hij voorspelde dat de wereldbevolking zo hard zou groeien, dat op de duur de voedselvoorziening die groei niet meer kunnen bijhouden. Er zou dan een tijd van armoede en oorlog komen.
Deze tabel geeft de groei van de wereldbevolking in het begin van de negentiende eeuw.

jaartal	1800	1810	1820	1830	1840	1850
bevolking (in miljoenen)	1000	1050	1102	1158	1216	1276

a Teken een grafiek bij de tabel.
b De punten liggen ongeveer op een rechte lijn. Teken een rechte lijn in je figuur.
c Met hoeveel mensen nam de wereldbevolking jaarlijks toe volgens de lijn die je hebt getekend?
d Hoeveel mensen zouden er dan in 1900 zijn?
e Malthus zag echter wel dat de groei aan het eind van de periode sneller ging dan aan het begin. Hij vertrouwde dit lineaire groeimodel niet. Volgens hem ging de groei niet lineair, maar procentueel met 5% per 10 jaar.
Met welke groeifactor rekende Malthus op die manier?
f Controleer dat je door die groeifactor te gebruiken inderdaad ongeveer de bevolkingsaantallen in de tabel krijgt.
g Hoeveel mensen zouden er volgens Malthus in 1900 zijn?

Kettingbrief

24 Iemand stuurt een brief naar 5 andere personen. In de brief staat de opdracht de brief weer naar 5 andere personen te sturen. Dus wordt het versturen van de brief telkens herhaald. Je noemt dit een kettingbrief. Als iedereen blijft meedoen en verschillende mensen niet naar dezelfde personen een brief sturen, groeit het aantal deelnemers aan een kettingbrief explosief. Ga daar in deze opgave van uit.
a Leg uit dat hier sprake is van procentuele groei van het aantal personen dat per keer een brief krijgt.
b Hoe groot is de groeifactor per ronde?
c De personen die een brief ontvangen van de vijf personen die de initiatiefnemer van de kettingbrief heeft aangeschreven, horen bij de tweede ronde.
Hoeveel mensen zitten er in de tweede ronde?
d In welke ronde worden er 625 brieven verstuurd?
e Hoeveel brieven zijn er dan totaal verstuurd?
f Leg uit waarom zo'n kettingbrief op den duur niet langer kan worden voortgezet, zelfs niet als iedereen wel een keer zou willen meedoen.

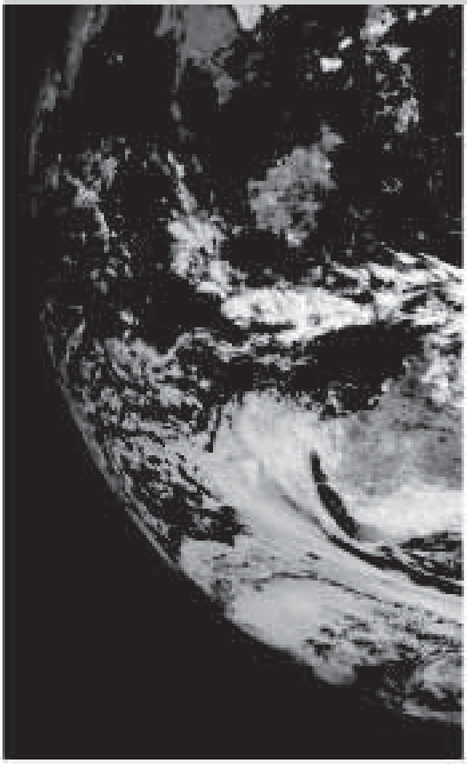
Exponentiële verbanden - C

LEERTAAK 3

Inleiding

Bij procentuele groei neemt de hoeveelheid elke tijdseenheid niet met hetzelfde aantal, maar met hetzelfde percentage toe.
Je kunt ook zeggen: er wordt elke tijdseenheid met dezelfde groeifactor vermenigvuldigd. En dat laatste rekent gemakkelijker.
Er ontstaat daardoor een verband tussen de hoeveelheid en de tijd waarbij een heel andere formule hoort dan bij een lineair verband. In dit geval spreek je van een exponentieel verband.

Inhoudsopgave



Wat moet je aan het eind kennen en kunnen

- "procentuele groei" als vermenigvuldiging met een vaste "groeifactor";
- het begrip "exponentieel verband";
- formules opstellen bij exponentiële verbanden;
- grafieken maken bij gegeven formules en formules maken bij gegeven grafieken van exponentiële verbanden.

Exponentiële verbanden - C

LEERTAAK 3

3.1 Tabel en groeifactor

1 Hier zie je een tabel waarin een hoeveelheid H toeneemt met de tijd t.

tijd t	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid H	200	240	288	346	415	498	597

a Waarom is er geen lineair verband tussen H en t?

b Je kunt je nu afvragen of er elke tijdseenheid hetzelfde percentage bijkomt. Er is dan sprake van procentuele groei.
De gemakkelijkste manier om dat na te gaan is onderzoeken of er elke stap met dezelfde groeifactor wordt vermenigvuldigd.
Met welke getal moet je de hoeveelheid bij $t = 0$ vermenigvuldigen om de hoeveelheid bij $t = 1$ te krijgen?

c Met welke getal moet je de hoeveelheid bij $t = 1$ vermenigvuldigen om de hoeveelheid bij $t = 2$ te krijgen?

d Controleer nu dat er elke stap met (ongeveer) hetzelfde getal wordt vermenigvuldigd.

e Hoeveel bedraagt de groeifactor per tijdseenheid?

f Met hoeveel procent neemt H per tijdseenheid toe?

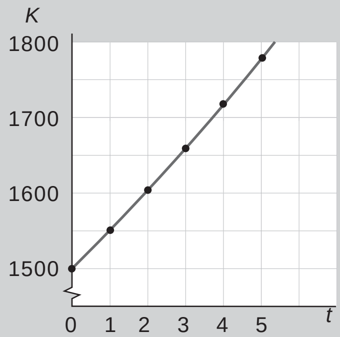
THEORIE

Van tabel naar groeifactor en omgekeerd

Hier zie je hoe iemands kapitaal toeneemt.

tijd t (in jaren)	0	1	2	3	4	5
kapitaal K (in €)	1500	1552,50	1606,84	1663,08	1721,28	1781,53

Het kapitaal neemt niet met een vast bedrag toe, elk jaar wordt de toename iets hoger.
De bijbehorende grafiek is geen rechte lijn, er is geen lineair verband tussen K en t.



Het kapitaal wordt wel elk jaar met dezelfde groeifactor vermenigvuldigd, ga maar na:

$$\frac{1552{,}50}{1500} \approx \frac{1606{,}84}{1552{,}50} \approx \frac{1663{,}08}{1606{,}84} \approx \frac{1721{,}28}{1663{,}08} \approx \frac{1781{,}53}{1721{,}28} \approx 1{,}035$$

De groeifactor per jaar is dus $1{,}035$.
Het kapitaal neemt daarom met $103{,}5 - 100 = 3{,}5\%$ per jaar toe.

Met deze groeifactor kun je gemakkelijk de tabel voortzetten: je vermenigvuldigt telkens het bedrag met $1{,}035$.
Hier moet je (omdat het over geld gaat) ook nog afronden op twee decimalen.

2 Het aantal inwoners van een dorp groeit de laatste jaren nogal snel.

jaartal	2000	2001	2002	2003	2004
aantal inwoners	5200	5620	6070	6550	7075

a Waarom is geen sprake van een lineair verband?

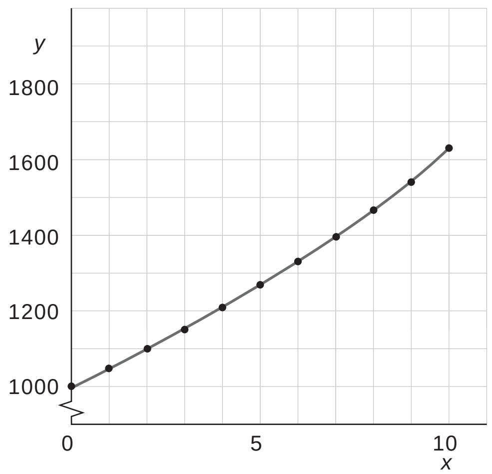
b Met welk getal moet je het aantal inwoners in 2000 vermenigvuldigen om dat in 2001 te krijgen? (Rond af op twee decimalen.)

c Met welk getal moet je het aantal inwoners in 2001 vermenigvuldigen om dat in 2002 te krijgen? (Rond af op twee decimalen.)

d Welke vaste groeifactor geldt voor deze tabel?
Welk vast groeipercentage geldt voor deze tabel?

e Hoeveel inwoners zou dit dorp in 2010 hebben als de groei zo door gaat? (Rond af op een vijftal.)

3 Je ziet hier een grafiek van het verband tussen y en x.



Maak bij deze grafiek een tabel en onderzoek of er sprake is van een constante groeifactor.

4 Het aantal vleermuizen in een bepaalde streek is aan het afnemen.

jaartal	2000	2001	2002	2003	2004
aantal vleermuizen	240	216	194	175	157

a Met welke vaste groeifactor neemt het aantal vleermuizen af? (Rond af op twee decimalen.)

b Met welk percentage neemt het aantal vleermuizen per jaar af?

c Hoeveel vleermuizen zijn er in 2010 als de afname met dit vaste percentage door gaat?

d Is het afnamepercentage per 10 jaar precies 10 keer het afnamepercentage per jaar? Licht je antwoord toe.

5 Hier zie je vier tabellen. Bereken telkens de waarde van H voor $t = 10$. Alle waarden van H zijn waar nodig afgerond op gehelen.

t	0	1	2	3	4	5
H	200	185	170	155	140	125

t	0	1	2	3	4	5
H	200	280	392	549	768	1076

t	0	1	2	3	4	5
H	4	5	8	13	20	29

t	0	1	2	3	4	5
H	500	475	451	429	407	387

Dit moet je kunnen.

6 Hier zie je wat er gebeurt als je € 1500,– tegen een vaste jaarrente op een bank zet.

jaar	2000	2001	2002	2003	2004
kapitaal	1500	1552,50	1606,84	1663,08	1721,28

a Met welke vaste jaarrente werkt deze bank?
b Hoeveel zou je kapitaal bedragen in 2015?

7 De hoeveelheid haring in de Noordzee neemt af. In een bepaald deel van de Noordzee is de hoeveelheid haring (in tonnen) gemeten.

jaartal	2000	2001	2002	2003	2004
hoeveelheid haring (in ton)	1800	1530	1300	1105	940

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar van de hoeveelheid haring? (Rond af op twee decimalen.)
b Met hoeveel procent per jaar neemt de hoeveelheid haring in dat deel van de Noordzee af?
c Hoeveel ton haring is er nog in 2014 als de "groei" zo door gaat?

3.2 Exponentiële groei

8 Je zet € 100,– op de bank. Je krijgt 4% rente per jaar. Verder doe je niets met dat geld.
a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?
b Hoeveel is het saldo na 10 jaar?
c Hoeveel is het saldo na t jaar?
d Je spreekt bij groei met een vaste groeifactor wel van *exponentiële groei*.
Je banksaldo groeit dus exponentieel.
Noem het banksaldo S. Welke formule beschrijft hoe je S uitrekent na t jaar?
e Welke waarde van t hoort er bij het beginsaldo?

THEORIE

Exponentiële groei en verval

Als een bepaalde beginhoeveelheid van 1500 *elk jaar met dezelfde groeifactor* $1{,}04$ *wordt vermenigvuldigd, dan is de hoeveelheid* H *na* 10 *jaar gelijk aan*

$$H = 1500 \cdot 1{,}04^{10}$$

Als t *het aantal jaren voorstelt, kun je dus in het algemeen zeggen dat*

$$H = 1500 \cdot 1{,}04^{t}$$

Je spreekt hier van **exponentiële groei** *met groeifactor* $1{,}04$ *en beginwaarde* 1500. *Die beginwaarde hoort bij* $t = 0$.

Als een beginhoeveelheid van 600 *elk jaar met* 4% *afneemt, is de groeifactor per jaar* $0{,}96$. *Dan geldt voor de hoeveelheid* H *na* t *jaar:*

$$H = 600 \cdot 0{,}96^{t}$$

Je spreekt nu van **exponentieel verval** *met groeifactor* $0{,}96$ *en beginwaarde* 600.

9 Een bioloog telt 5 jaar lang het aantal van een bepaalde vogelsoort.
In de tabel zie je zijn gegevens.

jaar	1996	1997	1998	1999	2000
aantal vogels	3045	3350	3685	4053	4458

a Neem $t = 0$ in 1996. Hoeveel is de "beginhoeveelheid"?

b Er is sprake van exponentiële groei. Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?

c Leidt de formule af van de groei van de vogelpopulatie V.

d Hoeveel vogels zou deze bioloog in 2010 moeten aantreffen?

e Ga er van uit dat deze vogelsoort ook voor 1996 al op dezelfde wijze exponentieel groeide in dit gebied. Hoeveel van die vogels waren er dan in 1990?

10 De stof Fermium wordt kunstmatig gemaakt. Deze stof komt niet in de natuur voor omdat hij niet stabiel is. Per dag verdwijnt vanzelf weer 1% van deze stof.

a Wat is de groeifactor per dag?

b Stel de formule op voor de overblijvende stof m als er 100 gram Fermium wordt gemaakt. Neem de tijd t in dagen na het maken van deze stof.

c Hoeveel gram is na 80 dagen van de stof over?

d Zal deze 100 gram Fermium op den duur geheel verdwijnen?

11 Een bacterie van een bepaalde soort deelt zich elke 15 minuten in twee bacteriën.
Een onderzoeker volgt het aantal bacteriën B vanaf een bepaald tijdstip $t = 0$, met t in uren. Op $t = 0$ zijn er 100 bacteriën.

a Hoeveel bacteriën zijn er een uur later?
Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur dus?

b Stel een formule op voor B afhankelijk van t.

c Hoeveel bacteriën zijn er na 2 uur?

12 Als dieren uit andere streken in het wild worden losgelaten, kunnen ze een plaag worden, omdat ze geen natuurlijke vijanden hebben. Zo is op een eiland een konijnenplaag ontstaan. Vijf jaar geleden waren er 9000 konijnen geteld, nu zijn er 12.600. Het aantal konijnen K groeit exponentieel.

t	-15	-10	-5	0	5	10	15
K	.....	.....	9000	12600	.....	.....	.....

a Stel de formule op voor K met als tijdseenheid vijf jaar.

b Vul de tabel verder in.

c Ga er van uit, dat er ooit eens twee konijnen op het eiland zijn losgelaten, een mannetje en een vrouwtje. Hoe lang moet dat geleden zijn?

Dit moet je kunnen.

13 Vorig jaar gingen er 85.000 Nederlanders op vakantie in Thailand. De komende jaren zal dat aantal naar verwachting exponentieel stijgen met $4{,}5\%$ per jaar.

a Stel een formule op voor het aantal Nederlanders N dat dit jaar op vakantie naar Thailand gaat.

b Hoeveel Nederlanders zullen er dan over 5 jaar op vakantie gaan naar Thailand?

14 Het aantal zeehonden in een bepaald natuurgebied daalt naar verwachting elk jaar met 2%. Dit jaar zijn er 2400 geteld.

a Het aantal zeehonden Z hangt af van de tijd t in jaren. Dit jaar is $t = 0$.
Welke formule geldt voor Z?

b Met hoeveel procent daalt het aantal zeehonden elke 10 jaar?

3.3 Van grafiek naar formule

15 De grafiek laat zien hoe een bepaalde hoeveelheid H exponentieel vervalt.

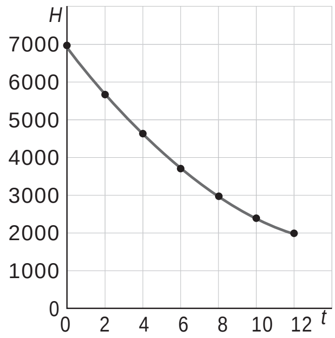
a Laat zien dat de groeifactor per dag $0,9$ is.

b Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid dagelijks af?

c Welke formule past bij deze grafiek?

d Hoeveel bedraagt de hoeveelheid als $t = 20$? (Rond af op gehelen.)

e Wordt deze hoeveelheid ooit 0?



THEORIE

Grafiek en formule

Hier zie je de grafiek van een exponentieel groeiproces. Je kunt er een formule bij maken. Je leest de hoeveelheden af bij twee opvolgende tijdstippen:

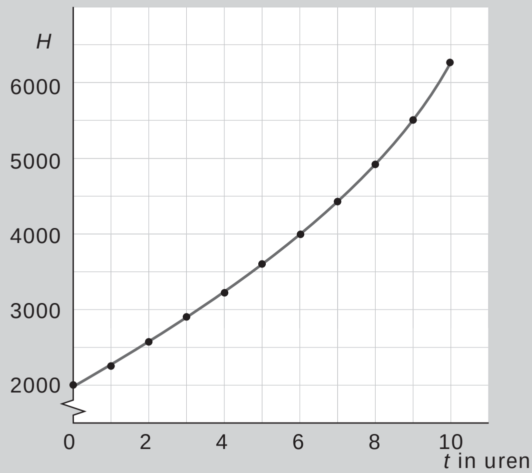
- bij $t = 0$ hoort $H = 2000$;

- bij $t = 1$ hoort $H = 2250$.

De bijbehorende groeifactor is $\frac{2250}{2000} = 1{,}125$.

De beginwaarde (op $t = 0$) is 2000.

De bijpassende formule is daarom $H = 2000 \cdot 1{,}125^t$.



Het is wel verstandig om even te controleren of je formule ook de juiste uitkomsten oplevert. Bijvoorbeeld geldt volgens de formule bij $t = 10$: $H \approx 6494$. Dat getal moet passen bij de grafiek.

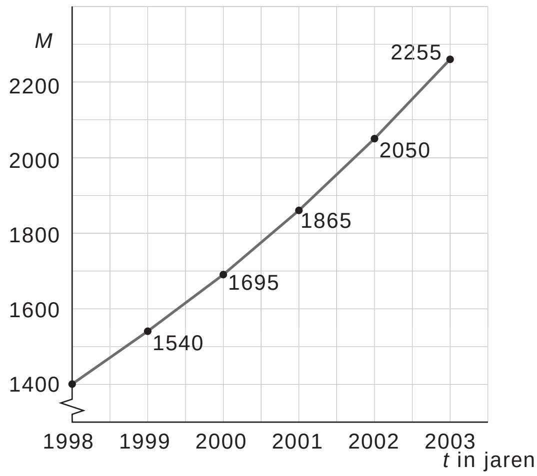
16 De grafiek laat de toename zien van het aantal muskusratten M in een bepaalde polder in Noord-Holland. In deze periode groeit het aantal muskusratten exponentieel.

a Hoeveel bedroeg in die periode de groeifactor per jaar?

b Welke exponentiële groeiformule past bij deze grafiek?

c Hoeveel muskusratten zullen er in 2010 zijn als de groei zich zo voortzet?

d Met hoeveel procent groeit het aantal muskusratten elke 10 jaar?



17 Bekijk de groei van de muskusratten in de periode 1998 - 2003 nog eens.
Het waterschap is erg ongerust over deze toename van muskusratten, want ze ondergraven de dijken. Ze stellen een bestrijdingsteam samen dat het aantal muskusratten met 10% per jaar moet terugdringen, voor het eerst in 2004.

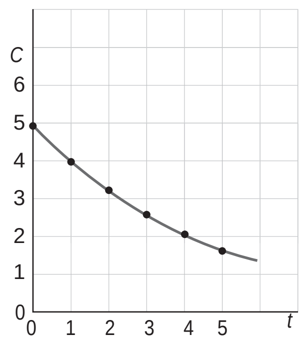
a Welke formule geldt voor het aantal muskusratten vanaf 2003? Neem nu $t = 0$ in 2003.

b Teken de grafiek van het aantal muskusratten vanaf 2004.

c Hoeveel muskusratten zijn er nu in 2010?

d Zal de muskusrat op deze manier in deze polder ooit uitsterven?

18 Met behulp van water wordt een giftige stof uit verontreinigde grond gewassen.
Een detector houdt de concentratie van de stof in het waswater bij. Die concentratie neemt exponentieel af volgens de getekende grafiek.
Stel een formule op voor de concentratie C van deze stof, met als tijdseenheid het aantal jaar nadat met het wassen is begonnen.



19 In een rivier is per ongeluk een giftige stof geloosd. De stof breekt op natuurlijke wijze af, maar dat gaat nogal langzaam. Er worden metingen verricht:

uren na lozing	1	2	4	8	24
gemeten hoeveelheid (in ml per liter water)	51	43	31	16	2

Je ziet dat zelfs 24 uur na de lozing de stof nog meetbaar aanwezig is in het rivierwater.

a Teken een bijpassende grafiek.

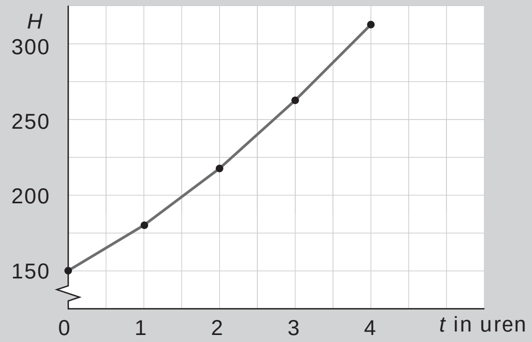
b Bekend is dat de afbraak van deze stof exponentieel verloopt.
Bepaal de groeifactor per uur (in twee decimalen nauwkeurig).

c Stel een formule op die bij de grafiek past.

d Hoe meer giftige stof er is afgebroken, hoe moeilijker de metingen worden.
Het getal dat is gemeten na 24 uur is dan ook niet erg betrouwbaar.
Hoeveel zou er moeten worden gemeten als de formule ook dan nog geldig is?

Dit moet je kunnen.

20 Bekijk de grafiek. Ga uit van exponentiële groei.



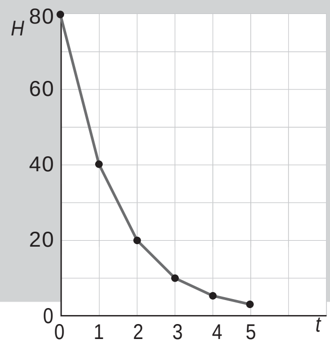
a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

b Hoe groot is H na 20 uur? (Rond af op een geheel getal.)

21 Bekijk de grafiek.
Ga uit van exponentieel verval.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

b Hoe groot is H na 10 uur?
(Rond af op twee decimalen.)



3.4 Toepassingen

De berekeningen van Malthus (2)

22 Hier zie je nog eens de tabel van de groei van de wereldbevolking in het begin van de negentiende eeuw.

jaartal	1800	1810	1820	1830	1840	1850
bevolking (in miljoenen)	1000	1050	1102	1158	1216	1276

a Malthus ging er van uit dat de wereldbevolking exponentieel groeide. Welke groeifactor per 10 jaar kon hij uit de tabel afleiden? (Rond weer af op twee decimalen nauwkeurig.)

b Hoeveel mensen zouden er in 2000 zijn geweest al Malthus gelijk had?

c Er waren in het jaar 2000 zo'n 6 miljard mensen op aarde. De groei van het aantal mensen verliep nog sneller dan Malthus voorspelde.
In feite is het aantal mensen in de periode van 1800 tot 2000 gegroeid met ongeveer $9{,}4\%$ per 10 jaar.
Welke formule geldt voor het aantal miljoenen mensen M afhankelijk van de tijd t in tientallen jaren? Neem voor het gemak $t = 0$ in 1800.

d Ga na, dat je met deze formule inderdaad uitkomt op ongeveer 6 miljard mensen in 2000.

e Hoeveel mensen zijn er in het jaar 2100 als de groei zo doorgaat?

f Het lijkt zo erg vol te worden op aarde. Maar misschien zal de groeifactor niet constant blijven als het aantal mensen heel erg toeneemt.
Stel je voor dat de groeifactor vanaf 2000 met 2% per 10 jaar afneemt.
Laat zien dat dan in 2050 de groei van het aantal mensen op aarde omslaat in exponentiële afname.

g Bereken eens hoeveel mensen er in dit geval in het jaar 3000 op aarde zijn. Meer of minder dan 6 miljard?

Vergelijkingen bij groei - C

Inleiding

Een exponentieel verband gebruik je als model voor groei waarbij de hoeveelheid die er bij komt (of af gaat) af hangt van de hoeveelheid die je al hebt: er komt een bepaald percentage bij.
Zo'n groeimodel is alleen interessant als je er voorspellingen mee kunt doen. Je wilt dan bijvoorbeeld vragen beantwoorden als: „In welk jaar is het aantal verdubbeld?" Dergelijke vragen geef je in de wiskunde weer als vergelijking. Die je dan wilt oplossen...

Inhoudsopgave

Wat moet je aan het eind kennen en kunnen

- vergelijkingen waarin exponentiële verbanden voorkomen grafisch oplossen;
- vergelijkingen waarin exponentiële verbanden voorkomen oplossen door inklemmen;
- ongelijkheden met exponentiële verbanden oplossen;
- verdubbelingstijd (of halveringstijd) uitrekenen.

4.1 Grafisch oplossen

1 Hier zie je een tabel waarin een hoeveelheid H toeneemt met de tijd t.

tijd t	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid H	50	80	128	205	328	524	839

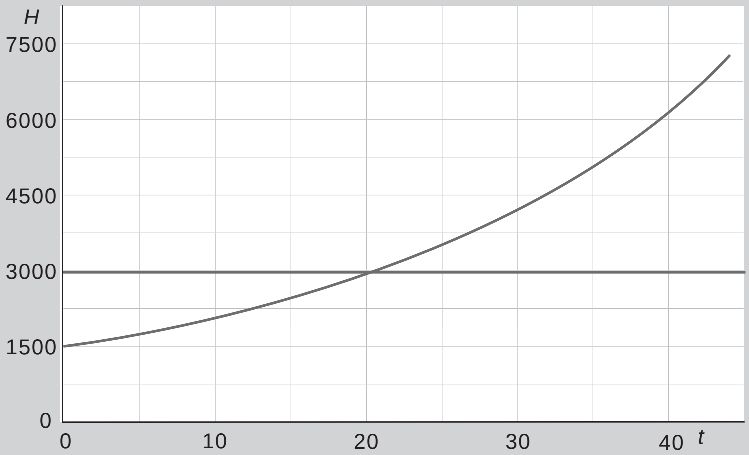
a Laat zien dat de hoeveelheid elke tijdseenheid met dezelfde groeifactor toeneemt.
b Welke formule geldt dus voor verband tussen H en t?
c Je kunt je nu afvragen na hoeveel tijd H bijvoorbeeld gelijk is aan 100.000.
Dat levert een vergelijking op waarin de variabele t voor komt.
Welke vergelijking?
d Maak nu zelf een tabel zoals de gegeven tabel, maar neem voor t de waarden 0, 5, 10, 15 en 20.
Teken een bij die tabel passende grafiek.
e Hoe vind je met behulp van je grafiek de oplossing van de vergelijking van opgave c?
f Welke waarde van t is de oplossing van de vergelijking? (Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.)

2 Het aantal inwoners van A bedraagt in het jaar 2000 ongeveer 6000. Het aantal groeit exponentieel met 5% per jaar.
Het aantal inwoners van B bedraagt in het jaar 2000 ongeveer 12.000. Het aantal groeit lineair met 600 per jaar.
a Teken grafieken van het aantal inwoners van de plaatsen A en B in één figuur.
Zet op de horizontale as de tijd t in jaren; neem $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$.
b Geef voor het aantal inwoners in A een formule en doe hetzelfde voor B.
c Welke vergelijking hoort bij de vraag: „In welk jaar hebben beide plaatsen evenveel inwoners?”
d Los deze vergelijking op met behulp van je grafiek.
e Wat is nu het antwoord op de in c gestelde vraag?

Vergelijkingen bij groei - C

THEORIE

Vergelijkingen grafisch oplossen



Hier zie je de grafiek van $H = 1500 \cdot 1{,}035^t$*.*
Als je wilt weten voor welke waarde van t *geldt* $H = 3000$*, dan moet je de* **vergelijking** $1500 \cdot 1{,}035^t = 3000$ *oplossen.*
Met de grafiek kun je de oplossing benaderen: $t \approx 20$*.*

Als je van twee formules zoals $H_1 = 1500 \cdot 1{,}035^t$ *en* $H_2 = 2000 + 75t$ *wilt weten voor welke waarde van* t *ze dezelfde uitkomst hebben, moet je de vergelijking* $1500 \cdot 1{,}035^t = 2000 + 75t$ *oplossen.*
Dat kun je doen door beide grafieken in één figuur te tekenen.
In het snijpunt van beide grafieken hebben ze dezelfde uitkomst. De bijbehorende waarde voor t *lees je af.*

3 Bestudeer het theorieblok nog eens.
De oplossing van de vergelijking $1500 \cdot 1{,}035^t = 3000$ werd benaderd door $t = 20$.
- a Laat zien, dat deze benadering redelijk goed is door 20 in de formule in te vullen.
- b Waarom is $t = 20$ niet de exacte oplossing van de vergelijking?
- c Zou je met behulp van een grafiek deze exacte waarde kunnen vinden, denk je? Motiveer je antwoord.
- d Er wordt in het theorieblok nog een tweede vergelijking bekeken. Los deze vergelijking zelf op met behulp van grafieken. Geef je antwoord in gehelen.
- e Controleer je antwoord door het in beide formules in te vullen. Vind je de exacte oplossing?

4 Iemand heeft € 1000,– op zijn bankrekening staan. Hij twijfelt tussen deze mogelijkheden:

1. het volledige bedrag op een spaarrekening zetten tegen 4% rente per jaar,
2. of € 800,– voor tenminste tien jaar vastzetten op een rekening die 6% rente per jaar oplevert.

a Stel de formule op die de groei van het kapitaal K_1 in de eerste situatie weergeeft.

b Stel de formule op die de groei van het kapitaal K_2 in de tweede situatie weergeeft.

c Bereken in beide situaties de waarde van het kapitaal over tien jaar.

d Geef de vergelijking waarmee je het moment kunt berekenen waarop bij beide spaarvormen hetzelfde bedrag op de rekening staat.

e Bereken met behulp van grafieken na hoeveel jaar de mogelijkheden 1 en 2 ongeveer hetzelfde opbrengen.

5 Een pijnstiller wordt verstrekt in pillen waarin 500 mg van de werkzame stof zit. Wanneer je zo'n pil inneemt komt hij in de maag en de darmen terecht. Elke 10 minuten wordt de helft van de in maag en darmen aanwezige hoeveelheid werkzame stof in het bloed opgenomen.

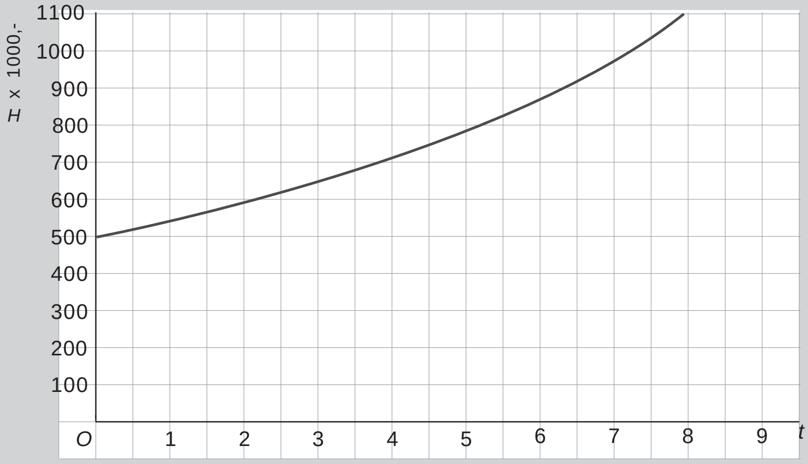
a Leg uit waarom deze formule geldt voor de hoeveelheid werkzame stof W in maag en darmen:
$W = 500 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{10}}$,
waarin t het aantal minuten na het innemen van de pil is.

b Maak bij deze formule een grafiek. Neem $t = 0, 5, 10, \ldots, 40$.

c Teken in dezelfde figuur de grafiek van de hoeveelheid werkzame stof B in het bloed. Na hoeveel tijd is 450 g van de werkzame stof in het bloed opgenomen? Gebruik de grafiek.

Dit moet je kunnen

6 Hier zie je de grafiek van een exponentieel groeiende hoeveelheid H.

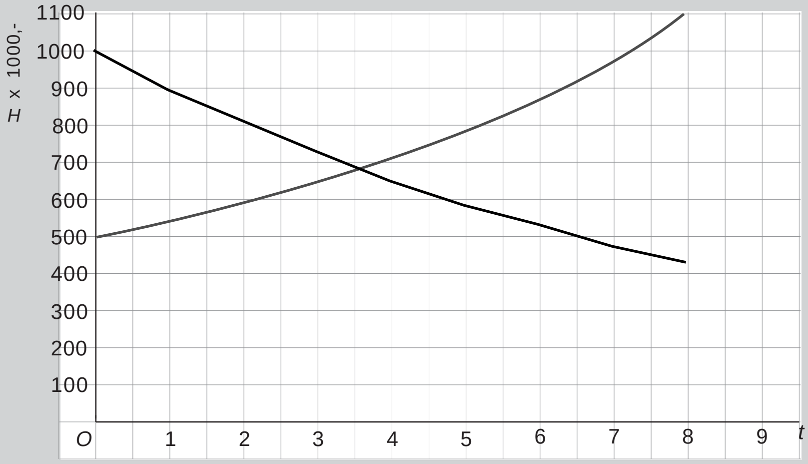


a Welke vergelijking hoort er bij de vraag: „Op welk tijdstip is de hoeveelheid $H = 1000$ geworden?”

b Bepaal de oplossing van deze vergelijking met behulp van de grafiek. (In één decimaal.)

c Controleer je oplossing door invullen.

7 Hier zie je de grafiek van een exponentieel groeiende hoeveelheid H_1 en een exponentieel afnemende hoeveelheid H_2.



a Welke vergelijking hoort er bij de vraag: „Op welk tijdstip zijn beide hoeveelheden even groot?”

b Bepaal de oplossing van deze vergelijking met behulp van de grafiek. (In één decimaal.)

c Controleer je oplossing door invullen.

4.2 Oplossen door inklemmen

8 Een hoeveelheid H groeit exponentieel volgens de formule $H = 50 \cdot 1{,}6^t$. Als je wilt weten na hoeveel tijd H gelijk is aan 10.000, dan moet je de vergelijking

$$50 \cdot 1{,}6^t = 10.000$$

oplossen. Met behulp van een grafiek maak je een eerste schatting van de oplossing.

a Teken een grafiek waarmee je de oplossing kunt benaderen; neem voor t de waarden 0, 5, 10, 15 en 20.

b Tussen welke twee gehele getallen zit de oplossing van deze vergelijking?

c Neem nu deze tabel over.

t	H	$H - 10.000$
$11{,}0$	......	......
$11{,}5$	......	......
......	......	......
......	......	......
......	......	......

Vul de eerste twee rijen volledig in.

d Je ziet dat in de derde kolom bij $11{,}0$ een negatief getal komt en bij $11{,}5$ een positief getal.
Waarom weet je nu zeker dat de oplossing een getal tussen $11{,}0$ en $11{,}5$ is?

e Neem nu in de derde rij voor t het getal $11{,}3$ en vul hem verder in.

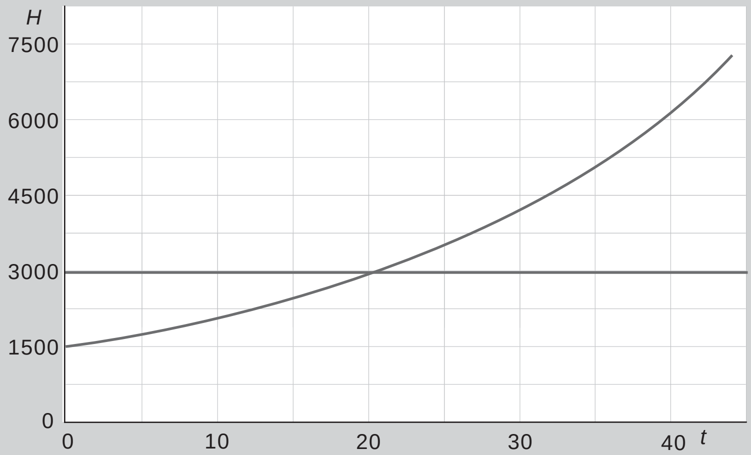
f Welk getal ga je nu in de vierde rij proberen? Heb je de juiste oplossing gevonden?

g Welk getal in één decimaal nauwkeurig benadert de oplossing het best?

h Maak nu op dezelfde manier een tabel om de oplossing in twee decimalen nauwkeurig te benaderen.

THEORIE

Oplossen door inklemmen



Als je de vergelijking $1500 \cdot 1{,}035^t = 3000$ wilt oplossen, schat je eerst de oplossing met een grafiek: $t \approx 20$.

Daarna benader je hem zo nauwkeurig als gevraagd wordt met behulp van een **inklemtabel***:*

t	H	$H - 3000$
20,0	2984,7	$-15{,}3$
20,3	3015,6	15,6
20,1	2995,0	$-5{,}0$
20,15	3000,1	0,1
20,14	2999,1	$-0{,}9$

Je ziet in de tabel dat in twee decimalen nauwkeurig het juiste antwoord $20{,}15$ is.

9 Je wilt de vergelijking $200 \cdot 0{,}92^t = 50$ oplossen.
- a Schat eerst de juiste oplossing met behulp van de grafiek van $H = 200 \cdot 0{,}92^t$.
- b Benader nu de oplossing in twee decimalen nauwkeurig met behulp van een inklemtabel.

10 Als je van twee formules zoals $H_1 = 1500 \cdot 1{,}035^t$ en $H_2 = 2000 + 75t$ wilt weten voor welke waarde van t ze dezelfde uitkomst hebben, moet je de vergelijking $1500 \cdot 1{,}035^t = 2000 + 75t$ oplossen.
- a Schat eerst de juiste oplossing met behulp van de grafieken van H_1 en H_2 in één figuur.
- b Benader nu de oplossing in twee decimalen nauwkeurig met behulp van een inklemtabel.

11 Een bacterie van een bepaalde soort deelt zich elke 20 minuten in twee bacteriën. Een onderzoeker telt het aantal bacteriën B vanaf een bepaald tijdstip $t = 0$, met t in uren. Op $t = 0$ zijn er 100 bacteriën.
Op welk tijdstip (in minuten nauwkeurig) zijn er 100 miljoen bacteriën?

12 In een bepaald gebied wordt een zekere diersoort met uitsterven bedreigd. Jaarlijks wordt de totale hoeveelheid dieren in dat gebied met 12% kleiner.
Bepaal zo nauwkeurig mogelijk na hoeveel jaren er nog maar 10% van deze soort dieren in het gebied leven.

Dit moet je kunnen

13 Een waterplant breidt in het voorjaar elke dag de oppervlakte die hij bedekt met $4{,}5\%$ uit. Op 1 april bedekt deze plant een oppervlakte van 12 m².
a Welke vergelijking hoort er bij de vraag: „Hoeveel dagen later bedekt deze plant een oppervlakte van 100 m²?”
b Los deze vergelijking op in één decimaal nauwkeurig.

14 Los de vergelijking $600 \cdot 0{,}8^x = 800 - 20x$ op in één decimaal nauwkeurig.

4.3 Ongelijkheden oplossen

15 Een hoeveelheid H groeit exponentieel volgens de formule $H = 50 \cdot 1{,}6^t$.
Als je wilt weten na hoeveel tijd H meer is dan 10.000, dan moet je de ongelijkheid

$$50 \cdot 1{,}6^t > 10.000$$

oplossen. Met behulp van een grafiek maak je een eerste schatting van de oplossing.

a Teken een grafiek waarmee je de oplossing kunt benaderen; neem voor t de waarden 0, 5, 10, 15 en 20.

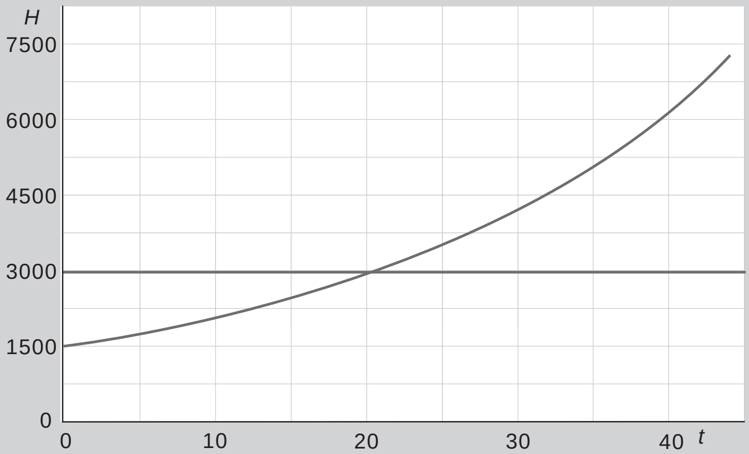
b Bepaal eerst de oplossing van de vergelijking $50 \cdot 1{,}6^t = 100.000$ in één decimaal nauwkeurig.

c Wat geef je nu als oplossing van de ongelijkheid? Gebruik de grafiek!

d Hoe heb je bij het antwoord bij c rekening gehouden met de afronding?

THEORIE

Ongelijkheid oplossen



Hier zie je de grafiek van $H = 1500 \cdot 1{,}035^t$.
Als je wilt weten voor welke waarde van t *geldt dat* H *meer is dan* 3000, *dan moet je de* **ongelijkheid** $1500 \cdot 1{,}035^t > 3000$ *oplossen.*
Met de grafiek en inklemmen kun je de oplossing benaderen: $t \geq 20{,}15$.
Dat de waarde $t = 20{,}15$ *ook tot het antwoord behoort komt door het afronden op twee decimalen.*

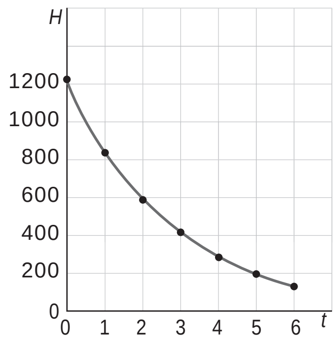
16 Los de volgende ongelijkheden op in twee decimalen nauwkeurig.

a $100 \cdot 1{,}1^x > 250$

b $100 \cdot 0{,}85^x < 10$

c $50 \cdot 1{,}04^t < 100 \cdot 0{,}88^t$

17 Voor een operatie is een patiënt onder narcose gebracht.
De hoeveelheid narcosemiddel in het bloed neemt na het indienen (op $t = 0$) langzaam exponentieel af. De grafiek laat dat zien.



a Welke formule geldt voor de hoeveelheid narcosemiddel N afhankelijk van de tijd t in uren in het bloed?
b Na hoeveel uur is de hoeveelheid narcosemiddel meer dan gehalveerd? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.
b De narcose raakt uitgewerkt als minder dan 25% van de toegediende hoeveelheid narcosemiddel in het bloed zit. Na hoeveel tijd is dat het geval? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

18 Voor het aflossen van schuld van € 750,– wordt elke maand € 25,– opzij gelegd, tot het hele bedrag ineens kan worden afgelost. Over de schuld wordt een rente van 1% per maand berekend.
a Geef een formule voor de schuld S afhankelijk van de tijd t in maanden na het ontstaan van de schuld.
b Geef een formule voor het gespaarde bedrag G.
c Geef de ongelijkheid waarmee je het tijdstip kunt uitrekenen waarop het gespaarde bedrag meer zal zijn aan het verschuldigde bedrag.
d Bepaal dit tijdstip op de maand af nauwkeurig.

19 Het aantal alcoholverslaafden A in een stad neemt volgens een rapport van de gezondheidsdienst exponentieel toe.

t	A
0	800
1	840
2	882
3	926

Bij $t = 0$ hoort het jaar 2000.
In welk jaar is het aantal alcoholverslaafden voor het eerst meer dan 1500?

Dit moet kunnen

20 Bekijk de formule $H = 5000 \cdot 1,2^t$
Voor welke waarden van t is deze grootheid meer dan vertienvoudigd (t.o.v. de beginwaarde)? (In één decimaal nauwkeurig.)

21 Los op in één decimaal nauwkeurig: $300 \cdot 0{,}9^t < 100 + 5t$

4.4 Toepassingen

Landbouwgrond

22 De wereldbevolking groeit exponentieel. De behoefte aan voedsel dus ook. Daarvoor is landbouwgrond nodig. De benodigde grond was in 1900 $0{,}45$ miljard hectare en nam jaarlijks met $1{,}4\%$ toe. Er was echter maar een beperkte hoeveelheid grond beschikbaar. Oorspronkelijk werd de hoeveelheid beschikbare grond geschat op ongeveer 2 miljard hectare. Wanneer wordt die grens bereikt?

a Welke vergelijking volgt er uit dit verhaal?

b Los deze vergelijking op. Bereken in welk jaar de hoeveelheid beschikbare grond totaal in gebruik was.

c Het bleek mogelijk om de hoeveelheid beschikbare landbouwgrond te vergroten door ontginning, inpoldering, drooglegging, e.d. En helaas ook door kappen van tropisch regenwoud.
Stel je voor dat de totale hoeveelheid beschikbare landbouwgrond met 10 miljoen hectare per jaar kan worden uitgebreid.
In welk jaar overstijgt de benodigde hoeveelheid landbouwgrond dan de beschikbare hoeveelheid?

d Kun je verklaren waarom de benodigde hoeveelheid landbouwgrond exponentieel stijgt, terwijl de beschikbare hoeveelheid lineair stijgt?

Loon en levensonderhoud

23 De eerste vijf jaar wordt in de zorgsector geen loonstijging verwacht. Een verpleegster heeft een salaris van € 2000,– en aan maandelijkse kosten voor levensonderhoud geeft zij op dit moment € 1500,– uit. Stel je voor dat de kosten voor levensonderhoud maandelijks met $0{,}4\%$ omhoog gaan.

a Stel een formule op voor het geld V dat zij maandelijks overhoudt na aftrek van de kosten voor levensonderhoud afhankelijk van het aantal maanden t. Neem $t = 0$ op het moment dat haar kosten voor levensonderhoud € 1500,– bedragen.

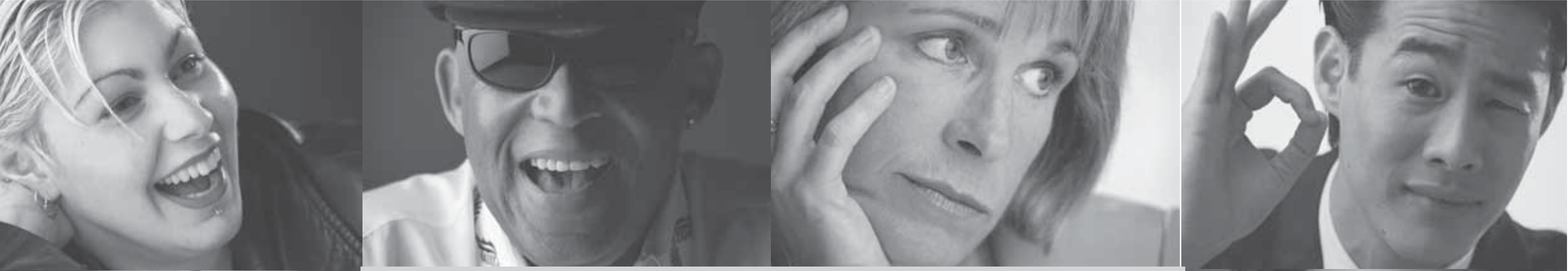
b Maak een grafiek bij deze formule.

c Komt er in die vijf jaar een moment waarop ze minder dan € 150,– per maand over houdt? Zo ja, in welke maanden? Bereken eerst de jaren, dan de maanden.

d Als de kosten voor levensonderhoud niet stijgen maar dalen met $0{,}4$%, hoe ziet de formule voor V er dan uit?

e Maak ook daar een grafiek van, in hetzelfde assenstelsel.

Ruimte voor notities



Dit project is bedoeld voor leerlingen in klas 2 hv of 3 vmbo.

Het doel van het project is het aanleren van wiskundige vaardigheden in een realistische context.
Het begrip maatwerk staat centraal.

Maatwerk omdat de wiskunde wordt aangeboden op het moment dat het nodig is.

Maatwerk omdat alleen die wiskunde aan de orde komt die nog onbekend is.
En maatwerk omdat de wiskunde wordt aangeboden in verschillende leerstijlen.

Dit project is mede mogelijk gemaakt door
een subsidie in de Vooruit!-regeling.