Wiskunde in wetenschap
vwo D

Wave en Golven

Wiskundig modelleren: Wave en Golven

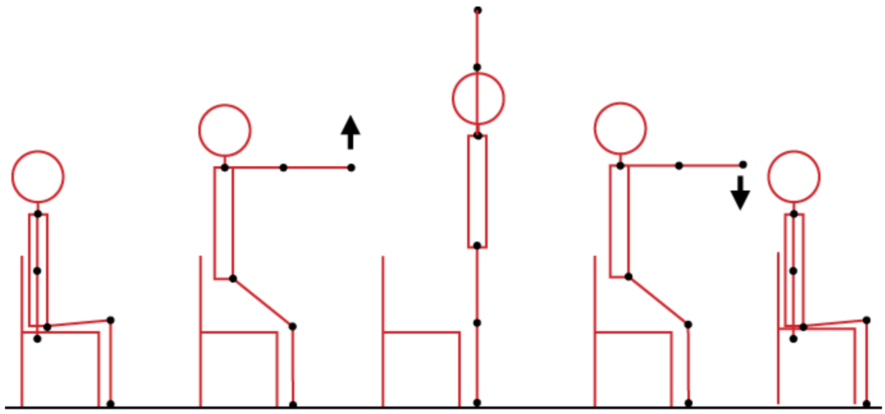
1. De Wave
2. Golven
3. Slotopmerkingen en inleiding op de vervolgmodule

universiteit Twente

1. De Wave

Bijna iedere toeschouwer bij een sportevenement in een stadion kent wel het verschijnsel van de *wave*. Om welke sport het ook gaat, zodra een wave rondgaat in een stadion, maken de opgewonden fans zich gereed om op het juiste moment aan de golf deel te nemen. Als de wave van de ene stoel naar de volgende gaat, springen de fans op en bewegen daarbij hun armen omhoog om dan weer onmiddellijk te gaan zitten waarbij ze hun handen naar beneden bewegen.

Zie ook: http://angel.elte.hu/~vicsek/
Kies hier onder Research: Mexican Waves waar een animatie staat



Onderzoekers analyseerden video opnames van 14 waves in voetbalstadions met meer dan 50.000 toeschouwers. Zij ontdekten dat een door mensen veroorzaakte wave zich meestal rechtsom (met de wijzers van de klok mee) voortbeweegt met een snelheid van ongeveer 12 meter (ofwel 20 stoeltjes) per seconde. Zo'n wave krijgt als hij zich voortplant door de menigte een opmerkelijk constant profiel met een lengte van 6 tot 12 meter wat overeenkomt met een gemiddelde van ongeveer 15 stoeltjes. Er waren niet meer dan enkele tientallen mensen voor nodig die de opgaande beweging maakten om een wave aan de gang te krijgen.

Zie bij: http://www.sciencenews.org/articles/20020914/mathtrek.asp
(het vijfde tekstblok)

Inleidende activiteiten

I. Beschrijf het verschijnsel stadionwave uitgebreid.
II. Verzamel alle relevante kwantificeerbare variabelen / parameters.
III. Spelen ook niet-kwantificeerbare factoren een rol? Welke?
IV. Tussen welke variabelen vermoed je een verband? En wat doe je met de rest van de variabelen en parameters? Waarom?
V. Welke vereenvoudigingen moet je maken?
VI. Welke aannames zijn er nodig?

Opgave 1
Waarom zou het verschijnsel *wave* worden genoemd?

Opgave 2
Het komt wel voor dat zich tegelijkertijd meerdere waves door het stadion voortbewegen. Om het verschijnsel wave te kunnen beschrijven, zullen we ons eerst beperken tot één enkele wave.
In welke twee richtingen kan die zich dan voortplanten door het stadion?

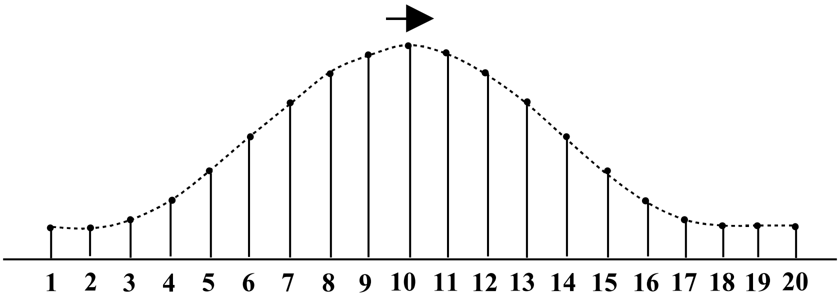
Opgave 3
Een stadion bestaat uit meerdere rijen boven elkaar. In de animatie zien we die rijen ook allemaal bewegen. Het model dat daarachter zit, is te ingewikkeld. Daarom beperken we ons tot één rij.
De toeschouwers zien de wave van rechts naderen. Stel dat zij reageren op de rechterbuur met een reactietijd van 0,5 seconde, hoe groot is dan de reactiesnelheid in stoeltjes per seconde? En in meters per seconde? Ga ervan uit dat de stoeltjes een breedte hebben van 60 cm inclusief tussenruimte.

Opgave 4
Wat is in dit geval de <u>golfsnelheid</u>?

We noemen de golfsnelheid vanaf nu *c*.

Opgave 5
Beantwoord dezelfde vraag als de toeschouwers met een reactietijd van 0,5 seconde reageren op:
- de toeschouwer op het stoeltje twee plaatsen naar rechts
- de toeschouwer op het stoeltje drie plaatsen naar rechts
- de toeschouwer op het stoeltje vier plaatsen naar rechts
- de toeschouwer op het stoeltje *x* plaatsen naar rechts.

In de schets hieronder zie je een wave vanaf een standpunt recht voor de tribune. Het is een momentopname, een soort foto. Van de toeschouwers zijn de handen als stip aangegeven en ze zijn genummerd.



Opgave 6

Beschrijf de bewegingen van de personen 1 tot en met 20 in termen als: zitten, op het punt staan op te staan, omhoog komen, met de handen recht omhoog staan, omlaag gaan, net weer gaan zitten, zitten weer op hun stoel.
Bedenk dat er in dit schema wordt gereageerd op de rechterbuur, maar dit is in de figuur links.
Hoe ziet het schema er een reactietijd later uit? En weer een reactietijd later, en weer…
Zie je dat je de golf als functie van twee variabelen kunt beschouwen? Welke twee?

Om verwarring te voorkomen spreken we af dat, als we het in het vervolg hebben over een golf (of wave), we hieronder de vorm zullen verstaan die hierboven geschetst is, maar dan wel alleen van een laagste tot een volgende laagste punt.

Opgave 7

Welke golflengte heeft de wave van het bovenstaande voorbeeld? Hoe kom je daaraan?

We noemen de golflengte vanaf nu L.

Opgave 8

Als een toeschouwer reageert op de rechterbuurman met een reactietijd van 0,5 sec (zie **opgave 3**), hoe lang duurt het dan voor een toeschouwer totdat de wave juist geheel gepasseerd is vanaf het moment dat hij in beweging kwam?

Dit wordt de golfperiode genoemd. Hiervoor gebruiken we vanaf nu T.

GOLFPERIODE = T GOLFLENGTE = L GOLFSNELHEID = c

Opgave 9

Welke beweging maakte deze toeschouwer in de periode die bij de vorige vraag wordt genoemd?

Opgave 10
Hoe lang duurt deze beweging dus?

Opgave 11
Wat is de dimensie van de bewegingstijd (**opgave 10**), van de reactiesnelheid (**opgave 3**) en van de golflengte (**opgave 7**)?

We zagen in **opgave 9** dat de bewegingstijd gelijk is aan de golfperiode en in **opgave 4** dat de reactiesnelheid gelijk is aan de golfsnelheid. Als we nu de dimensies van golfperiode, golfsnelheid en golflengte met elkaar vergelijken dan kunnen we een eenvoudig verband tussen deze drie grootheden *vermoeden*.

Opgave 12
Welk verband zou dit zijn? Geef dit verband in een formule weer.

Opgave 13
Stel nu, dat de reactietijd van een toeschouwer op zijn rechterbuurman 0,4 sec is, en dat de totale beweging van gaan staan tot weer zitten 8 sec duurt, bereken dan de golfsnelheid, de golfperiode en de golflengte. Doe dit ook voor een reactietijd op een naaste buurman van ⅓ sec en een bewegingstijd van 6 sec, en ook voor een reactietijd van ½ sec op de toeschouwer twee plaatsen naar rechts en een bewegingstijd van 7 sec.
Geef hierbij een uitgebreide toelichting op je antwoorden.

Voor alle getallenvoorbeelden die doorgerekend zijn, geldt het *vermoede* verband van **opgave 12**.

Opgave 14
Beredeneer nu, dat dit *vermoeden* juist is door met parameters i.p.v. getallen te werken. We gaan er vanuit dat er gereageerd wordt met een reactietijd van r sec op de naaste buur en dat de totale duur van de beweging T seconden is.

Kijk nog eens kritisch naar het artikel op sciencenews.org. Hoe zit het met de genoemde snelheden en wavelengtes? Is het voor 'normale' mensen wel mogelijk een op- en neergaande beweging te maken waarmee de genoemde wave-snelheden en wave-lengtes kunnen worden bereikt?

Opgave 15
Zoek met een experiment uit hoe lang één op- en neergaande beweging duurt.

Opgave 16

In het artikel op sciencenews.org wordt gesproken over golfsnelheden van ongeveer 20 stoeltjes per seconde en golflengtes van 6 tot 12 meter ofwel 10 tot 20 stoeltjes. Wat zeggen deze golfsnelheden over de snelheid van reageren van de toeschouwers? Welke reactietijd en bewegingstijd volgen daaruit? Is dat realistisch?
Vergelijk ook met jouw uitkomst van **opgave 15**.

Opgave 17

Om er achter te komen wat haalbaar is en wat niet, zou je een tabel kunnen maken met een c die loopt van ongeveer 16 tot 24 (stoeltjes/s) en een L die loopt van 10 tot 20 (stoeltjes) en de te berekenen waarden van T erin te zetten. Je kunt hierbij handig gebruik maken van het programma Excel. Ook kun je, als je de tabel met de hand tekent, je GR handig inzetten. Geef hierin aan welke waarden van L aannemelijk zijn en trek je conclusie.

Er zijn verschillende manieren denkbaar waarop de toeschouwers bewegen, bijv:

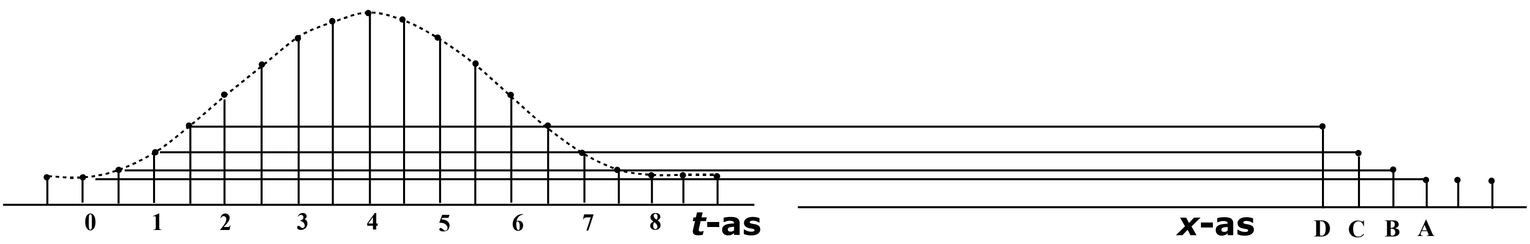
- even snel omhoog als naar beneden (waar we tot nu toe vanuit gingen), of
- even blijven staan als je rechtop staat, of
- sneller omhoog dan naar beneden, of
- langzamer omhoog dan naar beneden.

Deze manier van bewegen zal gevolgen hebben voor de wave zoals die door het stadion gaat.

Opgave 18

Op het bijgevoegde **werkblad** is links steeds het bewegingsprofiel getekend voor elk van deze vier gevallen waarbij de beweging in gelijke tijdsintervallen is opgedeeld.
Teken steeds het golfprofiel dat behoort bij het bewegingsprofiel. Ga uit van een wavelengte van resp. 16, 20, 12 en 12 stoeltjes en van een bewegingssnelheid van 2 stoeltjes per sec. Maak gebruik van het bijgevoegde werkblad.

Toelichting bij de eerste figuur:



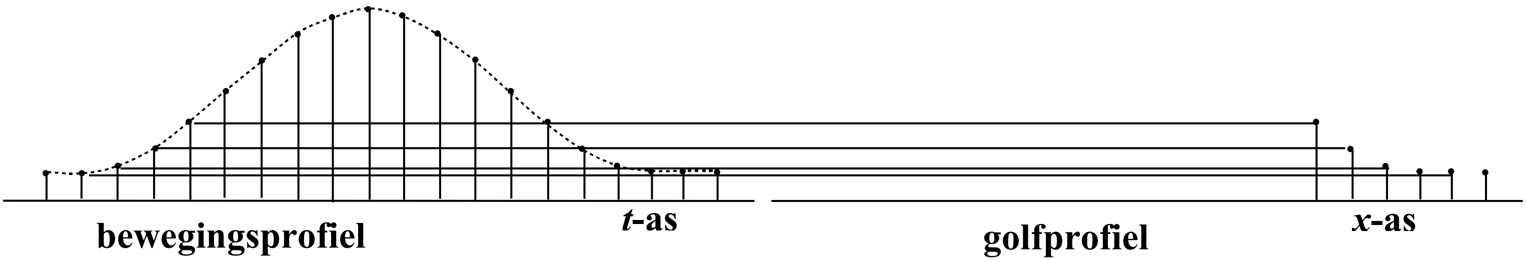
gegeven bewegingsprofiel **te tekenen golfprofiel**

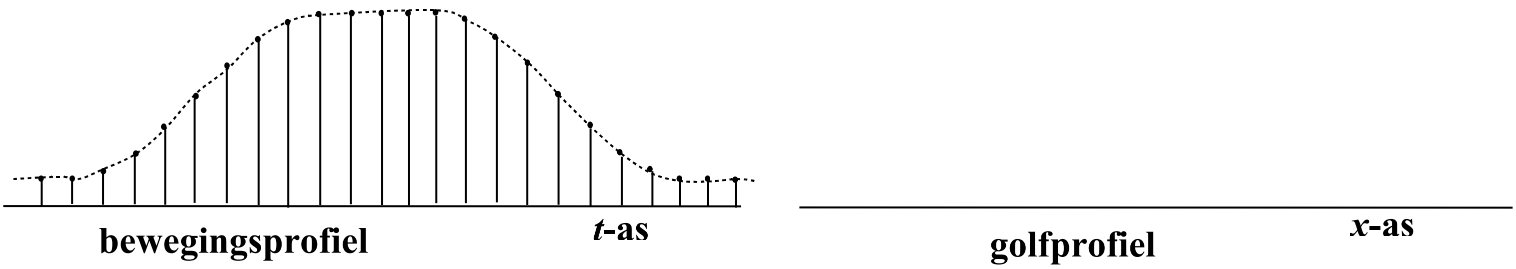
In de figuur hierboven zie je hoe het begin is gemaakt met het tekenen van het golfprofiel bij een gegeven bewegingsprofiel.
De afstand tussen twee streepjes op de *t*-as staat voor de reactietijd (in dit geval 0,5 seconde = reactietijd op naaste buur) en op de *x*-as voor de stoelafstand.
Stel dat juist op het tijdstip *t* =0 dat een persoon (A) reageert op zijn rechterbuur (B) een foto wordt gemaakt. Die momentopname is het te tekenen golfprofiel.
Op die foto moet dan te zien zijn dat:

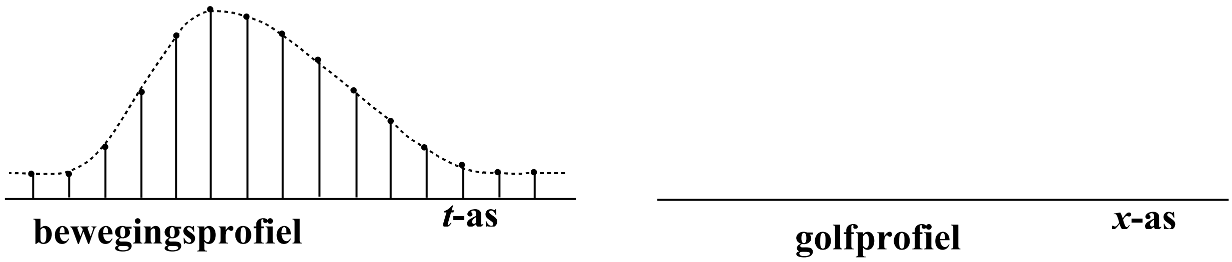
- de personen links van A (voor de fotograaf rechts) nog niet hebben gereageerd en dus nog in beweging moeten komen zodat hun handhoogte nog dezelfde is als die van A,
- persoon B die rechts naast A zit een fase verder is in zijn beweging dan A, want B is een reactietijd (0,5 s.) eerder dan A in beweging gekomen,
- persoon C die rechts naast B zit weer een fase verder is in zijn beweging dan B en
- persoon D die rechts naast C zit weer een fase verder is in zijn beweging dan C
- enz…

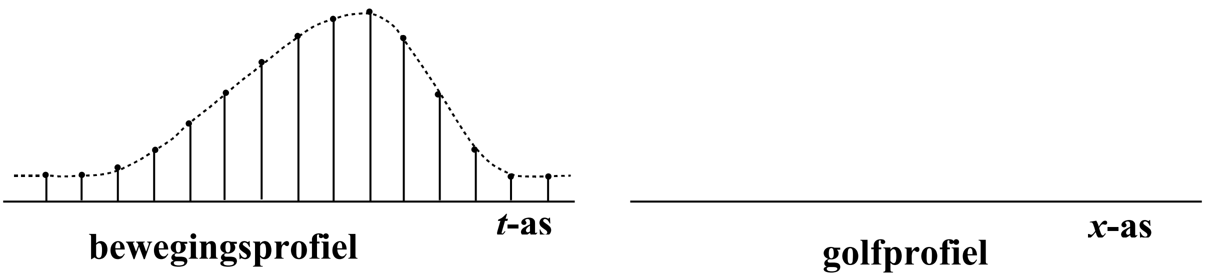
Maak het eerste golfprofiel op het werkblad af en teken daarna de overige golfprofielen.

Werkblad te gebruiken bij **opgave 18**









Toepassingsvragen

Opgave 19
Welk probleem ontstaat als het stadion een hoefijzervorm heeft of een kuipvorm? Bedenk in beide gevallen welke gevolgen dit zal hebben voor de wave.

Opgave 20
En wat gebeurt er als alleen in de voorste rij op de buurman wordt gereageerd en de andere rijen op de persoon voor hen reageren?

Opgave 21
Stel je voor dat de toeschouwers de op en neergaande beweging voortdurend doorzetten. Het woord voortdurend moet je hier niet te letterlijk opvatten maar voor een jong publiek met een redelijke conditie moet het mogelijk zijn de beweging zolang vol te houden dat een dergelijke wave ten minste twee keer het stadion rond gaat. Hoe ziet het waveprofiel er nu uit vergeleken met het vorige profiel?

Opgave 22
Welk probleem kan er ontstaan er als de kop van de wave weer aankomt bij de haard (de groep gangmakers)? Probeer dit nu zelf uit, door bijv. met meerdere personen in een kring te gaan zitten en een doorlopende wave te laten ontstaan. Als je begrijpt welk probleem er kan ontstaan: Is er een oplossing te bedenken?

Opgave 23
Het zou aardig zijn als je zelf nog op een creatief idee komt of een probleem bij jezelf of je werkgroepje weet op te roepen dat om een antwoord vraagt.

In het vervolg van deze module getiteld ***Golven*** zullen we een formule proberen te vinden die de golfhoogte beschrijft als functie van plaats en tijd. Om je enigszins voor te stellen wat hiermee bedoeld wordt, moet je weer even kijken naar **opgave 21** waar alle personen van het stadion voortdurend in beweging zijn. De baan die de handen van de toeschouwers beschrijven wordt een ***lopende transversale golf*** genoemd die zich voortplant door het stadion.

zie ook:
http://fys.kuleuven.be/pradem/applets/suren/Twave/Twave01.html

2. Golven

Opgave 24

Als je denkt aan golven in de zin van 'gewone' golven in zee die door de wind worden veroorzaakt en die zich met een constante snelheid voortbewegen, aan welk type golf uit de natuurkunde denk je dan? (vraag eventueel je natuurkundedocent).

> zie ook (watergolven):
> http://intranet.vituscollege.nl/Vaklokalen/natuurkunde/Applets/ll_menu/bovenbouw/4htrillingen_en_golven/Long_transv_golven/LongitudinalandTransverseWaveMotion.html

Enkele grootheden die een rol spelen bij de beschrijving van een lopende golf zijn:

grootheid	symbool	eenheid	omschrijving
hor.afstand	*x*	m	afstand tot een willekeurig gekozen punt O in de stroomrichting
vert.uitwijking	*z*	m	verticale uitwijking t.o.v. wateroppervlak
amplitude	*a*	m	maximale uitwijking t.o.v. wateroppervlak
golflengte	*L*	m	afstand tussen twee golftoppen
golfgetal	*k*	m^{-1}	'aantal' golven binnen afstand van 2π in de stroomrichting ($k \times L = 2\pi$)

Als je een momentopname (foto) van een golf maakt, loodrecht op de stroomrichting (de tijd wordt even stilgezet), dan zie je een zgn. golfprofiel:

Opgave 25
Als we de hoogte van het wateroppervlak willen beschrijven hebben we vier van de genoemde grootheden nodig. Welke vier?

In ons model beperken we ons nu tot een golfprofiel.

Opgave 26
Welke vereenvoudiging hebben we hiervoor gemaakt?

De vorm van een golfprofiel lijkt nogal op een sinus(grafiek). Als we in zo`n golfprofiel de verticale uitwijking *z* als functie van *x* willen beschrijven, kunnen we dus heel goed de sinusfunctie daarvoor gebruiken.

Opgave 27
Teken op het interval [0;100] het golfprofiel $z = 3\sin(0{,}1\pi x)$ en geef in de figuur netjes *x*, *z*, *a* en *L* aan. Welke waarde heeft *k*?

Een golfprofiel zoals dat zich in de Noordzee zou kunnen voordoen, heeft een golflengte van 60 meter en een golfhoogte van 5 meter (golfhoogte = 2 × amplitude).

Zie:
http://www.knmi.nl/onderzk/oceano/special/jvdo/golven/
bij : Worden de golven almaar hoger?
en
http://nl.wikipedia.org/wiki/Golfbreker
bij: Drijvende golfbreker:

Opgave 28
Welke waarde heeft *k* dan?
Schets dit golfprofiel over een afstand van twee golflengtes en geef een formule die erbij hoort.

Opgave 29
Geef ook de algemene formule voor *z* als functie van *x* met de parameters *a* en *k*.

We gaan nu een lopende golf bekijken.

Opgave 30
Breng onder woorden wat een lopende golf is. Kun je je er een voorstelling van maken?

Bij een lopende golf speelt dus, naast de al eerder genoemde grootheden, nog een aantal grootheden een rol:

grootheid	symbool	eenheid	omschrijving
tijd	t	s	tijd
golfperiode	T	s	tijdsduur tussen passeren van twee golftoppen
voortplantingssnelheid	c	m/s	snelheid waarmee de golf zich voortplant
horizontale verplaatsing t.o.v. het willekeurige punt O na t seconden	x_t	m	afstand waarover de golf zich voortplant in t seconden.

In **opgave 31, 32** en **34** gaan we uit van de golf van **opgave 27**.

Opgave 31

Neem aan dat deze golf zich voortplant met een snelheid van 4 m/s. Teken in dezelfde figuur ook het golfprofiel na het verstrijken van 0,5 s, 1 s, 1,5 s. Over welke afstand heeft de golf zich steeds per halve seconde voortgeplant?

Opgave 32

Geef van elk van de getekende golfprofielen de bijbehorende formule.

Deze formules kun je ook (her)schrijven in de vorm $z = a\sin(k(x - x_t))$

Opgave 33

Doe dit. Wat stelt x_t voor?

Vier boeien dobberen op het water op een afstand van resp. 12 m, 20 m, 70m en 100 m in de stroomrichting.

Opgave 34

Bereken hun hoogte t.o.v. het gemiddelde wateroppervlak op de tijdstippen t = 0; t = 0,5; t = 3; t = 10; t = 50. (We gaan er hier voorlopig van uit dat de golf van 'links' eindeloos gevoed wordt, en dat we een vast punt x = 0 en een vast tijdstip t = 0 kiezen.)

Bij het beantwoorden van een vraag als de vorige ontstaat al gauw de behoefte aan een formule.
We willen nu een formule opstellen waarbij we voor elke lopende golf de verticale uitwijking ten opzichte van het gemiddelde wateroppervlak kunnen berekenen voor elke *x* (= afstand in de stroomrichting) en elke *t* (= tijdstip).

Het zou mooi zijn als in die formule behalve *z*, *x* en *t* alleen die parameters zouden voorkomen die karakteristiek zijn voor de lopende golf waar we het over hebben, dus: *a*, *k, c, L* en *T.*

Kijk nog eens naar de formule in **opgave 33**. Deze voldoet dus niet helemaal aan genoemde wens, de x_t moet nog weggewerkt worden, d.w.z. uitgedrukt in *c* en *t*. Of nog beter in *T*, *L* en *t*.
Kijk ook nog eens naar de grootheden zoals ze zijn gedefinieerd.

Opgave 35

Druk x_t uit in *c* en *t*. Welke formule krijg je nu?

Je hebt bij de vorige vraag x_t uitgedrukt in *c* en *t*. Neem nu voor *t* de waarde *T*.

Opgave 36

Welke waarde heeft x_t in dit geval?

Opgave 37

Druk *c* uit in *L* en *T*. Herschrijf nu m.b.v. de antwoorden van **opgave 35 en 36** de formule die je bij **opgave 33** gevonden hebt.

Opgave 38

Druk *k* uit in *L*. Hoe verandert de formule uit **opgave 37** dan?

Opgave 39

Herschrijf tenslotte de formule uit **opgave 38** als $z = a \sin 2\pi\,(.....)$

We laten het proces nog eens de revue passeren: wat hebben we nu gedaan?
Om een formule te vinden voor een golf die tijd- en plaatsafhankelijk is, hebben we

- eerst de vereenvoudiging tot een sinus gemaakt (is aannemelijk, waarom?),
- vervolgens de tijd buiten beschouwing gelaten,
- toen we de tijd wilden invoeren, ontdekt dat we daarvoor de snelheid moesten weten (waarom is dat zo gek niet?),
- toen gewoon wat wiskundig gemanipuleerd,
- en uiteindelijk een formule gevonden waarin het argument van de sinus dimensieloos is.

3. Slotopmerkingen en inleiding op de vervolgmodule

In **opgave 39** hebben we een formule gevonden die de golfhoogte beschrijft als functie van plaats en tijd, met de karakteristieken L en T van de golf, nl.
$\eta(x,t) = a\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right)\right)$ (in plaats van de letter z wordt meestal de Griekse letter η (èta) gebruikt).
Omdat $\frac{2\pi}{L} = k$ en $\frac{2\pi}{L} = \omega$, (ω is de frequentie van de golf) kunnen we deze formule ook schrijven als: $\eta(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$.

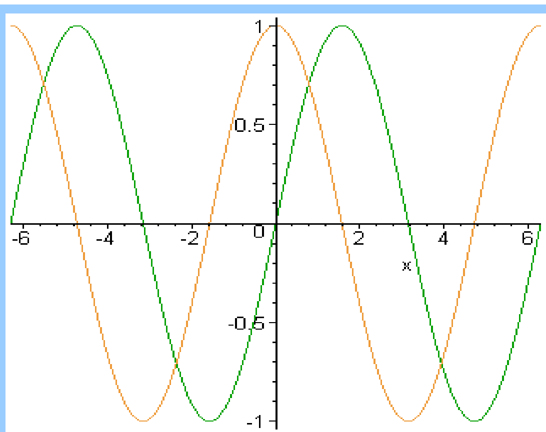
Opgave 40
Doe dit.

In de technische literatuur wordt deze formule meestal geschreven als een cosinusfunctie.

Opgave 41
Toon aan door de bekende formule $\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$ te gebruiken dat we $\eta(x,t)$ kunnen schrijven als $a\cos\left(k(x - \frac{1}{4}L) - \omega t\right)$.

Door de x-as iets aan te passen, kunnen we de formule voor onze golfbeweging dus ook schrijven in de vorm: $\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t)$.

Opgave 42
Wat wordt er met bovenstaande opmerking bedoeld?



Een sinus- (groen) en een cosinusfunctie (oranje)

Wat we in het tweede deel van deze module Golven gedaan hebben, is het geven van een puur ‘kinematische’ beschrijving van een golf (kinematica = bewegingsleer).
In de formule $\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t)$ kunnen we dan ook alle mogelijke waarden voor k en ω invullen zonder dat het iets uitmaakt voor de wiskundige beschrijving. Het is daarom dat we deze beschrijving een ‘kinematische beschrijving’ noemen; oneerbiedig gezegd: er is geen enkele fysische eigenschap van het verschijnsel nodig voor de kinematische beschrijving.
Slechts de beschrijving van de vorm en beweging van de golf door middel van grootheden zoals golflengte en frequentie was ons voorlopige doel.
Dezelfde formule kan in principe ook worden gebruikt voor andere golfverschijnselen die je in de natuur tegenkomt zoals licht, geluid of schokgolven bij aardbevingen, die allemaal totaal andere fysische eigenschappen hebben.

Een werkelijk golfverschijnsel in de natuur zal echter afhankelijk zijn van de aard van de golven en van, bijvoorbeeld, materiaaleigenschappen.
Een paar voorbeelden:

- Licht plant zich voort door lucht, maar ook door verschillende materialen zoals glas, of water. De voortplantingssnelheid hangt af van het materiaal; in lucht (eigenlijk vacuüm) is de snelheid het grootst, bijna 300.000 km/s.
- Seismische golven zijn drukgolven die bijvoorbeeld opgewekt kunnen worden door een aardbeving. Die golven planten zich ook voort door de aarde waarbij de snelheid afhankelijk is van het materiaal: sneller door ‘vaster’ materiaal zoals steen dan door ‘losser’ materiaal zoals zand.
- Walvissen communiceren over grote afstanden door de voortplanting van geluidsgolven in het water, zoals wij met elkaar spreken door geluidsgolven door de lucht. Deze geluidsgolven zijn drukgolven; denk aan je trommelvlies, en kijk naar de uitwijking van een trommelvlies van een (ouderwetse?) geluidsbox. Je kunt uit de observatie van zo'n geluidsbox werkelijk zien dat de ‘lage’ tonen een lage frequentie hebben. Ook voor geluidsgolven geldt, dat hun voortplantingssnelheid afhangt van het materiaal waardoor het geluid zich voortplant. Maar voor geluid geldt, in tegenstelling tot licht, dat de voortplantingssnelheid in water bijvoorbeeld groter is dan in lucht.
- Je hebt ongetwijfeld wel eens onweer gehoord. Kun je beredeneren waarom je aan het ‘geluid’ van de donder kunt horen hoe ver jouw afstand tot het onweer is?
- Watergolven, die in de vervolgmodule worden beschreven.

In al deze gevallen blijkt het zo te zijn dat de fysica van het verschijnsel een zeer specifieke relatie geeft tussen golfgetal k en frequentie ω.
Dus, niet willekeurige combinaties (k,ω) zijn mogelijk, maar voor een gegeven frequentie is er onder vaste omstandigheden waarbij we bijvoorbeeld moeten denken aan gelijke temperaturen of dezelfde diepte) slechts één golfgetal.

In een vervolgmodule zullen we de gevolgen van deze eigenschap voor watergolven, en tsunamigolven in het bijzonder, onderzoeken.