

Wiskunde in wetenschap vwo D

Golven en tsunami's

Wiskundig modelleren: Golven en tsunami's

1. Golven en tsunami's
2. Golfsnelheid
 - 2.1. De snelheid van watergolven
 - 2.2. Korte golven
 - 2.3. Lange golven
3. Verandering van de tsunami-golflengte bij nadering van de kust
4. Verandering van de tsunami-amplitude bij nadering van de kust

© geen, dit is vrij kopieerbaar materiaal geproduceerd door een kerngroep van docenten in samenwerking met de universiteit Twente ten behoeve van het domein "Wiskunde in wetenschap" dat deel uitmaakt van het vak wiskunde D voor vwo.

Deze module is een vervolg op de module Wave en Golven.

1. Golven en tsunami's

TOKIO - Onder de Stille Oceaan halverwege Japan en Rusland heeft zich gistermiddag (onze tijd) een zeer zware aardbeving voorgedaan.

In het noorden van Japan, Siberië en Alaska werd een tsunami-waarschuwing gegeven, maar verwoestende vloedgolven bleven uit.

Het Pacific Tsunami Warning Center zei in een mededeling te vrezen voor vloedgolven die tot circa 2 meter hoog zouden kunnen worden. Uiteindelijk werd een eerste vloedgolf van slechts 40 centimeter hoog geregistreerd. Het epicentrum

Krantenartikel:

Bij het lezen van dit krantenartikel kunnen we ons afvragen hoe zo'n waarschuwing tot stand komt. Over tsunami-waarschuwingssystemen kunnen we o.a. het volgende lezen

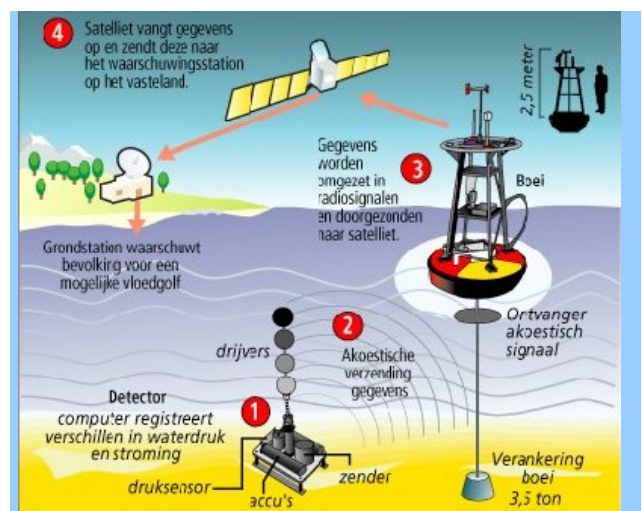
(bron: <http://www.kennislink.nl/web/show?id=128363>)

"Tsunami-waarschuwingssysteem

Om in de toekomst beter voorbereid te zijn op een tsunami wordt er een waarschuwingssysteem gebouwd in de Indische Oceaan. Een zelfde soort tsunami-waarschuwingssysteem bestaat al in de Stille Oceaan. Het is aangelegd nadat in 1946 een aardbeving bij Alaska een tsunami veroorzaakte die 165 mensen het leven kostte. De meeste doden vielen duizenden kilometers verderop in Hawaï.

In het begin bestond dit systeem alleen uit een netwerk van seismische meetstations en waterpeil-meters. De seismische stations meten aardbevingen en uit die gegevens kan worden vastgesteld hoe zwaar een aardbeving is en waar hij precies heeft plaatsgevonden. De waterpeil-meters zijn gewone zeespiegelhoogte-meters die enkele kilometers uit de kust liggen. Zij meten een tsunami als hij dicht bij de kust komt. Om er zeker van te zijn of een gemeten aardbeving een tsunami had veroorzaakt, moest men wachten op een teken van de waterpeil-meters. Dit systeem kon wel de aardbevingen meten en de tsunami vlak bij de kust, maar niet hoeveel tsunami-energie zich verplaatst naar verder gelegen gebieden. Hierdoor waren drie van de vier meldingen vals alarm.

Drie jaar geleden is het oude systeem verbeterd met zes nieuw ontwikkelde tsunami-sensoren. Deze sensoren liggen op de bodem en kunnen een tsunami midden op de oceaan opmerken. Het zijn een soort weegschalen die de druk van het water op de zeebodem meten. Als er een tsunami-golf voorbij komt, neemt de hoeveelheid water boven op de sensor toe en wordt er een toename in de druk gemeten. De weegschalen zijn zo nauwkeurig dat ze zelfs op 6000 meter diepte een tsunami-golf van een centimeter kunnen opmerken. Golven die ontstaan door schepen of wind worden niet gemeten omdat die een veel kortere golflengte hebben. Wanneer de sensor een



Waarschuwingssysteem voor vloedgolven

tsunami meet, wordt er vanaf de zeebodem een akoestisch signaal doorgegeven naar een boei aan het wateroppervlak. De boei geeft de informatie via een satelliet door naar een station aan land, van waaruit de kustplaatsen gewaarschuwd zullen worden. Het installeren van een tsunami-waarschuwingssysteem is slechts een gedeelte van de benodigde voorbereiding voor een toekomstige ramp. Het is ook heel belangrijk om een goed communicatiesysteem te hebben om zo snel mogelijk zoveel mogelijk mensen aan de kust te bereiken.

Ook moeten de kustbewoners informatie krijgen over wat ze moeten doen als er een tsunami-waarschuwing gegeven wordt. In landen rond de Stille Oceaan staan er borden op het strand met de tekst: "in het geval van een aardbeving, ga naar hoger gelegen gebied of landinwaarts". Evacuatie routes zijn met bordjes en pijlen aangegeven en er worden regelmatig tsunami-oefeningen gehouden."



In deze module zullen we niet tsunamiwaarschuwingssystemen behandelen, maar we gaan eigenschappen van het verschijnsel tsunami onderzoeken op grond waarvan zulke systemen kunnen werken.

Een tsunami is een hoge vloedgolf, maar in het bovenstaande artikel lezen we over een tsunamigolf van een centimeter (hoogte). Hoe zit dat? Het blijkt dat de golfhoogte afhankelijk is van de diepte van het water. Deze eigenschap gaan we onder andere nader bekijken in deze module. Ook de in het artikel genoemde begrippen energie en golflengte komen aan de orde, evenals de golfsnelheid.

Als voorbereiding op de wiskundige benadering in deze module van het verschijnsel tsunami is het goed, dat je **eerst de volgende achtergrondinformatie leest**:
(bron: <http://www.natuurinformatie.nl/nm.dossiers/natuurdatabase.nl/i003350.html>)

Het ontstaan van een tsunami

Een tsunami is een supergolf die op gang komt door een onderzeese aardbeving. Het zeewater neemt de energie van de aardbeving op en zet deze om in krachtige golfbewegingen die honderden of duizenden kilometers over de aardbol reizen en elke kust die ze bereiken grote schade kunnen toebrengen. Via tsunami's hebben dus ook onderzeese aardbevingen een verwoestend effect op het land.

Het ontstaan en de ontwikkeling van een tsunami verloopt volgens een aantal vaste fasen, die hieronder worden toegelicht.



Het aardoppervlak bestaat uit losse platen die ten opzichte van elkaar kunnen bewegen. De grenzen van de platen lopen grotendeels door zee. Waar de platen langs elkaar schuren, tegen elkaar botsen of onder elkaar schuiven, treden grote spanningen in de aardkorst op. Als deze spanningen vrijkomen, ontstaan schokgolven die de aardkorst heftig in trilling brengen. Soms is de spanningsopbouw zo groot dat een aardplaat een stuk wordt opgetild.

Op het land zijn de trillingen voelbaar als een aardbeving. Vindt de beving op de bodem van de zee plaats, dan wordt de energie van de trillende bodem overgebracht op de bovenliggende waterkolom. Komt de zeebodem in zijn geheel omhoog, dan wordt ook de bovenliggende waterkolom omhoog geduwd.

Meestal zijn alleen spanningen die opgebouwd worden als een oceanische plaat onder een continentale plaat schuift (zogenaamde subductie) groot genoeg om een tsunami te laten ontstaan. Er is hiervoor een beving oftewel spanningsontlading nodig met een kracht van minstens 7,5 op de [schaal van Richter](#).



Door de opname van de kinetische energie van de aardbeving begint ook de waterkolom boven het epicentrum van de beving te trillen. Als gevolg hiervan ontstaat een cirkelvormige rimpeling aan het wateroppervlak. De tophoogte van deze rimpeling bedraagt slechts enkele decimeters. Als de zeebodem zich opheft kan de tophoogte van de

rimpeling enkele meters bedragen. Op volle zee is zo'n hoogteverandering nauwelijks merkbaar, zodat schepen er doorgaans geen last van zullen hebben. De beving brengt echter een groot gebied in beweging: de rimpeling bevat daardoor zeer veel energie.



Omdat de zwaartekracht aan het omhoog bewegende water trekt, wordt de verticaal gerichte kinetische energie van de aardbeving omgezet in een horizontale beweging: als gevolg hiervan, en door nieuwe trillingen die door de aarde aan het water worden doorgegeven, splitst de ontstane rimpeling zich op in meerdere golven, die zich van het epicentrum van de beving verwijderen. De golven hebben dezelfde kringvorm en vertonen hetzelfde gedrag als de kringen die ontstaan als men een steen in een vijver gooit.



De golven verwijderen zich met hoge snelheid van het epicentrum van de beving, maar de verwijderingssnelheden zijn niet overal even groot. In het algemeen geldt dat golven die zich over diep water verplaatsen een grotere snelheid hebben dan golven die zich over ondiep water verplaatsen. De tsunamigolf die in de richting van de open oceaan gaat verwijderd zich dus sneller van het epicentrum dan de tsunami die zich in de richting de kust verplaatst. Deze golf reist immers over de steeds ondieper wordende continentale plaat en zal onderweg meer weerstand ondervinden, waardoor zijn snelheid steeds meer afneemt.

De voortplantingssnelheid van de golf is wiskundig te berekenen. De snelheid is namelijk de wortel uit de diepte (in meter) x de zwaartekrachtversnelling ($9,8 \text{ m/s}^2$). Als de waterdiepte 1000 meter is, zal de tsunami met een snelheid van ongeveer 356 kilometer per uur over het wateroppervlak rollen (wortel uit $1000 \times 9,8 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 99 \text{ m/s} = 356 \text{ km/uur}$). De golf die vlak bij de kust op een waterdiepte stuit van 10 meter zal zich met een snelheid van 35,6 kilometer per uur verplaatsen.



Zodra de tsunami de ondiepe kustzone nadert, begint het zogenaamde grondeffect op te treden. De voorkant van de golf wordt door de weerstand die hij van de olopende bodem ondervindt geremd, terwijl de achterkant van de golf nog de volledige snelheid heeft. Hierdoor wordt de golf in elkaar gedrukt. Het water kan nog maar één kant op: omhoog. De top hoogte van de golf zal plotseling sterk toenemen.



De laatste honderden meters voor de kust neemt de waterdiepte snel af, waardoor de voortrollende watermassa nog meer weerstand ondervindt. De olopende kustlijn remt de voorkant van de golf steeds meer in zijn beweging, terwijl de achterkant, die zich in dieper water bevindt, met grotere snelheid kan blijven doorrollen. Op een gegeven moment loopt de achterkant van de golf als het ware tegen de voorkant op, waardoor de golf nog verder in hoogte toeneemt. Het klimmen van de golf veroorzaakt zuiging aan de voorkant, waardoor zeewater dat zich tussen de tsunami en de kust bevindt in de golf omhoog wordt getrokken. De kustlijn trekt zich nu in korte tijd tientallen tot honderden meters terug. Even lijkt het eb te worden, een situatie die een minuut of tien kan duren.



Als de supergolf uiteindelijk de kust bereikt, rolt hij als een muur van water over het land heen, alles verwoestend wat hij op zijn weg tegenkomt.

Wie deze enorm krachtige golf overleeft, is nog niet in veiligheid, omdat het water zich met evenveel kracht als het gekomen is ook weer terugtrekt in zee. Tegen de zuigende werking van het water is vrijwel niets bestand. Bovendien komen achter de eerste krachtige golf meerdere tsunami's aan, soms krachtiger, maar meestal minder krachtig dan de eerste.

Tsunami's hebben in de regel golflengtes in de orde van grootte van tientallen kilometers, dus zelfs in open oceanen is een dergelijke golflengte groot ten opzichte van de diepte van het water, en bovendien zijn hun snelheden groot.

Inleidende opdrachten

- I. Zoek gegevens op over de gemiddelde diepte van de oceanen. Weet je ook hoe diep de diepste oceaan is?
- II. Zoek informatie over de snelheden die tsunami's kunnen bereiken en over hun mogelijke golflengte.

Als een tsunami het ondiepe water nabij de kust nadert, zal de snelheid en de golflengte afnemen, terwijl de amplitude toeneemt (we zullen het verband tussen amplitude en diepte en snelheid en diepte in deze module onderzoeken). Dit verschijnsel kan verwoestende gevolgen met zich meebrengen, waarvan de televisie ons de beelden heeft laten zien.

Zie ook: <http://www.wldelft.nl/gen/news/tsunami/>

De gegevens die verkregen worden door de in het begin van deze inleiding beschreven apparatuur, worden gebruikt om o.a. tijd, plaats en vloedhoogte te berekenen. Deze berekeningen worden uitgevoerd binnen een zeer ingewikkeld model.

In de module: *Wave en Golven*, is in het slot al opgemerkt dat, als het gaat om golfverschijnselen in de natuur, er altijd een eenduidig verband bestaat tussen de golflengte en de golfperiode.

In deze module zal worden ingegaan op:

- het genoemde verband tussen golflengte en de golfperiode (in 2.1) met als gevolg:
- het verband tussen de golfsnelheid en de diepte van de oceaan (in 2.2 en 2.3),
- het verband tussen de golflengte en de diepte van de oceaan (in par.3),
- het verband tussen de amplitude van de tsunamigolf en de diepte van de oceaan (in par.4).



Tsunami komt uit het Japans. Tsu (boven) betekent haven, nami golf.

De drie streepjes aan de linkerkant van beide tekens betekenen "water".

2. Golfsnelheid

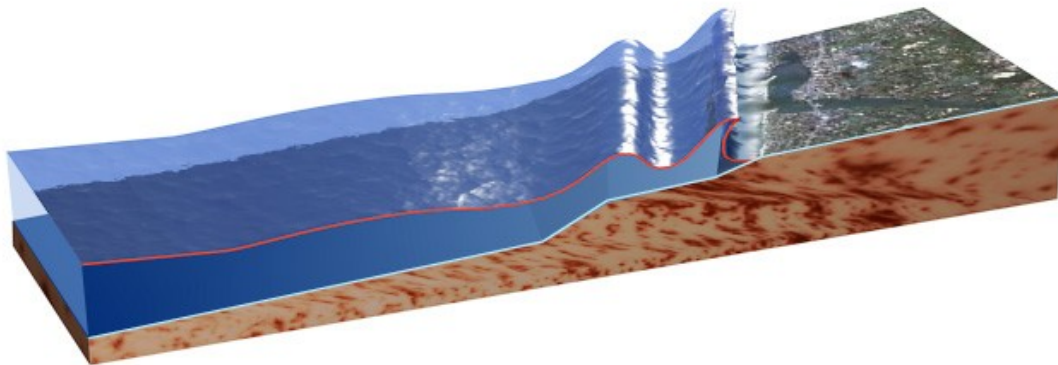
2.1 De snelheid van watergolven

We hebben in de vorige module een formule gevonden die de golfhoogte van een lopende golf beschrijft als functie van plaats en tijd: $\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t)$.

Hierin zijn k en ω de karakteristieken van de golf, namelijk $k = \frac{2\pi}{L}$, waarbij L de

golflengte is, en $\omega = \frac{2\pi}{T}$, met T de golfperiode. In deze formule zit ook de amplitude a . We gaan nu het gedrag van deze amplitude nader beschouwen.

Als je nog eens een animatie van de tsunami van 26 december 2004 bekijkt, en je let op de kleur die de golfhoogte aangeeft, dan valt je op, dat de golfhoogte midden op de oceaan niet erg groot is, maar bij het naderen van land toeneemt. Misschien kun je ook zien dat de snelheid van de tsunami afneemt. Deze beide verschijnselen gaan we nu onderzoeken.



Tsunamigolven, windgolven, golven die ontstaan als je een steen in het water gooit, zijn allemaal lopende golven, die op dezelfde manier beschreven kunnen worden. Voor de snelheid c van een lopende golf heeft men de volgende formule gevonden:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(hk)} \quad (\text{formule I}),$$

waarbij h de diepte van het water (de oceaan of de zee) is.

De definitie van $\tanh(x)$ (spreek uit: tangens hyperbolicus) is: $\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ waarbij:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (\text{spreek uit: sinus hyperbolicus})$$

en:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (\text{spreek uit: cosinus hyperbolicus})$$

De k in deze formule is het in de vorige module genoemde golfgetal, en h is de diepte van het water. De g is de versnelling ten gevolge van de zwaartekracht ($g \approx 9,81 \text{ms}^{-2}$).

Voordat we echter deze formule (o.a. met de grafische rekenmachine) gaan onderzoeken, ontdekken we iets bijzonders, namelijk het aan het eind van de vorige module *Wave en Golven* al aangekondigde verband tussen ω en k , of ook tussen de golflengte L , en de golfperiode T . T is namelijk als functie van L te schrijven, en ω als functie van k .

Opgave 1

- a) Schrijf T als functie van L , door in **formule I** c te vervangen door $\frac{L}{T}$ (zie **opgave 14**, van de module *Wave en Golven*), en k door de definitie $\frac{2\pi}{L}$.
- b) Schrijf ook ω als functie van k , door in **formule I** c weer te vervangen door $\frac{L}{T}$ en de definities $k = \frac{2\pi}{L}$ en $\omega = \frac{2\pi}{T}$ te gebruiken.

Dit resultaat betekent dus dat er voor een vaste diepte bij elke golflengte L slechts één golfperiode T hoort!!!

Opgave 2

Beredeneer dat de grafiek van $\tanh(x)$ een horizontale asymptoot heeft. Welke?

Opgave 3

Waarom kun je het domein van de tangenshyperbolicus in deze context beperken tot $[0, \rightarrow)$?

Opgave 4

Plot met de GR de grafiek van $y = \tanh(x)$ voor $0 \leq x \leq 20$ en ga na vanaf welke x deze functie groter dan 0,99 is.

Opgave 5

Teken nu de grafiek van deze functie op $[0 ; 0,3]$. Hier lijkt de grafiek op een rechte lijn. Ga na welke.

We werken liever met de golflengte L in plaats van k .

Opgave 6

Herschrijf **formule I** door k te vervangen door $\frac{2\pi}{L}$.

2.2 Korte golven

Opgave 7

In opgave 4 heb je bepaald vanaf welke x het verschil tussen 1 en $\tanh(x)$ kleiner dan een honderdste is. In opgave 6 heb je **formule I** vervangen door een uitdrukking met h en L .

Ga na met het antwoord van opgave 6 voor welke waarde van de verhouding $\frac{L}{h}$ de waarde van $\tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$ minder dan een procent afwijkt van 1.

Opgave 8

Schrijf de in de vorige opgave gevonden ongelijkheid in de vorm $L < \dots$

In de literatuur over golven vinden we voor korte golven de vereenvoudiging van

formule I tot $c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$

Opgave 9

Leg uit waarom men dit mag doen. Wat zijn dus "korte golven"?

We zien hier dus dat de snelheid van korte golven niet meer afhankelijk van de diepte is, maar alleen van de golflengte!

Soms definieert men in de literatuur een golf kort, als $L < 4h$, de vervanging van $\tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$ door 1 is dan wat onnauwkeuriger.

Opgave 10

Bereken hoeveel $\tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$ afwijkt van 1, als $L = 4h$.

Opgave 11

Gebruik deze benadering van c voor korte golven om L uit te drukken in T , en vervolgens T in L .

Windgolven op zee zijn korte golven. Op de Noordzee hebben ze bijvoorbeeld een golfperiode van 5 tot 10 seconden. En op de oceanen hebben ze een periode van 10 tot 15 seconden. Ver genoeg uit de kust heeft de Noordzee een diepte van ongeveer 35 meter, en de gemiddelde diepte van een oceaan is ongeveer 4 km (zie **inleidende opdracht I**).

Opgave 12

Bereken in onderstaande tabel met **formule I** welke golflengte de windgolven op de Noordzee en op de oceanen hebben. Klopt het dat het korte golven zijn?

T in s	h in m	L in m	$2,37h$ in m	$4h$ in m	korte golf?
5	35				
10	35				
10	4000				
15	4000				

2.3 Lange golven

Tsunamigolven zijn in tegenstelling tot windgolven lange golven, zoals we al eerder bij **opdracht b** van de inleiding hebben gezien. Daarom gaan we ook eens kijken of we **formule I** kunnen vereenvoudigen voor zulke lange golven.

Opgave 13

In **opgave 5** heb je gezien, dat $\tanh(x) \approx x$, als x klein is. Onderzoek met de GR voor welke x geldt dat $\tanh(x)$ niet meer dan 1% afwijkt van x .

Opgave 14

Ga net zoals in **opgave 8** na wat het resultaat van **opgave 13** betekent voor de verhouding van L en h .

Opgave 15

Voor golflengtes die aan de ongelijkheid van **opgave 14** voldoen, mag je dus $2 \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$ vervangen door

Doe dat. Hoe wordt de formule voor de snelheid dan?

In de literatuur noemt men soms golven die een golflengte $L > 12h$ hebben al lange golven.

Opgave 16

Bereken voor $L = 12h$: $\tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$ en de relatieve afwijking van $\tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$ ten opzichte van $\frac{2\pi h}{L}$.

Opgave 17

Ga na, dat in de formule $c = \sqrt{gh}$ de dimensies kloppen.

Opgave 18

Ga na met de gegevens uit **inleidende opdracht II** of tsunamigolven lang zijn volgens de hiervoor gegeven definitie van lange golven.

h in km	L in km	$12h$ in km	$36h$ in km	lange golf?
2	100			
2	400			
5	100			
5	400			
10	100			
10	400			

We mogen dus inderdaad voor tsunamigolven de vereenvoudigde formule voor c gebruiken.

Opgave 19

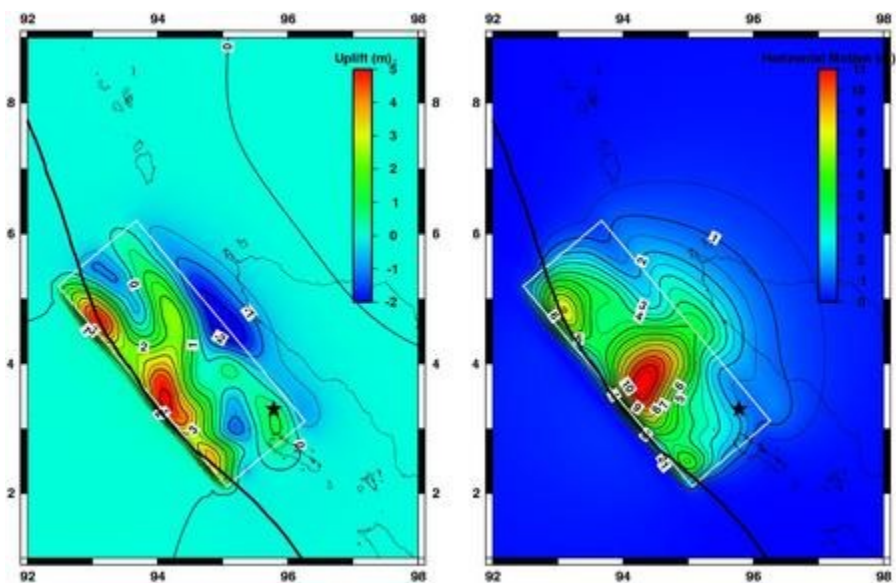
Vul onderstaande tabel in om een indruk te krijgen van de snelheid van een tsunami in de oceaan en bij het naderen van de kust. Neem $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

diepte	in m	4000	1000	200	10	1
snelheid c	in m/s					
	in km/u					

3. Verandering van de tsunami-golflengte bij nadering van de kust

Niet alleen de *snelheid* is afhankelijk van de diepte ($c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(hk)}$), ook de *golflengte* en de *amplitude* zijn dat. Dat gaan we nu onderzoeken. Daarvoor hebben we eerst weer wat natuurkundige modelvorming nodig. Bij het ontstaan van een tsunami wordt de golflengte bepaald door de breedte van het gebied, waarvan de oceaانبodem zich verheft.

Zie : http://www.knmi.nl/kenniscentrum/hoe_ontstaan_tsunamis/
Lees tot en met de zin onder de twee gekleurde figuren zoals die ook hieronder staan.



Die breedte was, zeker in het geval van de tsunami van 26 december 2004, heel groot, waardoor er dus heel lange golven werden opgewekt. Door het verheffen van de oceaانبodem komt de waterspiegel omhoog. Dit wordt de top van de golf. In het geval van de tsunami van 26 december 2004 was dit een stuk van ongeveer 100 km breed, over een lengte van ruim 400 km. De top van de golf had dus ongeveer een lengte van 100 km. Een ander deel van de oceaانبodem, n.l. aan de langste zijde van het verstoringsgebied, zakte weg t.g.v. de aardbeving. Dit leidde tot een daling van de waterspiegel, waardoor het dal van de golf gevormd werd. Deze verzakking was ook ongeveer 100 km breed; wat tot gevolg had dat de golflengte (= top + dal) van deze tsunami in de orde van 200 km lag.

De golf gaat "lopen" omdat de zwaartekracht aan de plotseling opgetilde (voor een tsunami is een aardbeving van tenminste 7 op de schaal van Richter nodig) watermassa gaat "trekken". De snelheid van deze lange golf wordt bepaald door de diepte (zie par.2). Bij het ontstaan van de tsunami ligt dus zowel de golflengte L (door de grootte van het verstoringsgebied) als de snelheid c (door de diepte van de zee) vast. Maar omdat geldt: $c = \frac{L}{T}$, ligt dus ook de periode T van de golf vast.

De periode van de golf is gelijk aan de periode van de afzonderlijk bewegende waterdeeltjes (zie hiervoor het eerste deel van de vorige module over de stadionwave). Deze deeltjes geven hun beweging(senergie) vrijwel geheel wrijvingsloos aan hun naaste buur door. Dat betekent dat ook de buur met dezelfde frequentie gaat bewegen en dit houdt weer in dat de periode van de tsunamigolf gedurende de hele afstand die hij aflegt gelijk blijft.

Maar omdat de periode van de golfbeweging al bij het ontstaan van de tsunami werd vastgelegd en omdat $c = \frac{L}{T}$ zoals we al eerder zagen van de diepte afhangt, zal L evenals c met de diepte veranderen.

Opgave 20

Toon aan dat er een evenredig verband bestaat tussen L en \sqrt{h} (kijk ook nog eens naar **opgave 15**).

Opgave 21

Vul de onderstaande tabel in:

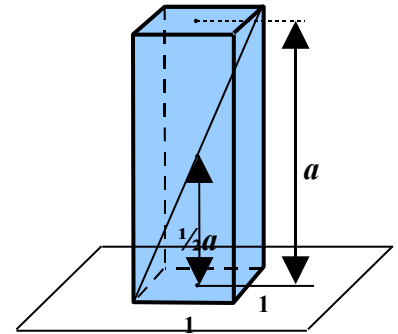
diepte	in m	4000	1000	200	10	1
golflengte	in km	100				

4. Verandering van de tsunami-amplitude bij nadering van de kust

In deze paragraaf gaan we het verband tussen de amplitude en de diepte onderzoeken.

Nu met wat meer natuurkunde. Wij hebben hier de wet van behoud van energie nodig.

Allereerst gaan we de zwaartekrachtenergie van een golf bekijken als door een verhoging van de zeebodem het water a meter omhoog gebracht wordt. Dit gebeurt bij een aardbeving zeer plotseling. Door de zwaartekracht wil het water naar de evenwichtsstand: de watermassa heeft nu potentiële energie. We gaan in een zeer vereenvoudigd model de aanvankelijke potentiële energie berekenen van een kolom water t.o.v. het gemiddelde waterniveau.



Figuur 1

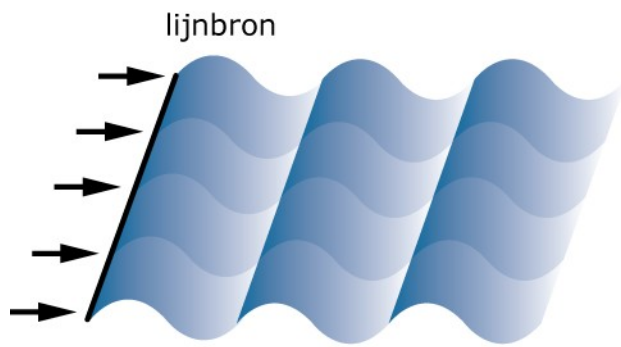
Opgave 22

Geef de formule voor de potentiële energie voor een (punt)massa m op hoogte h .

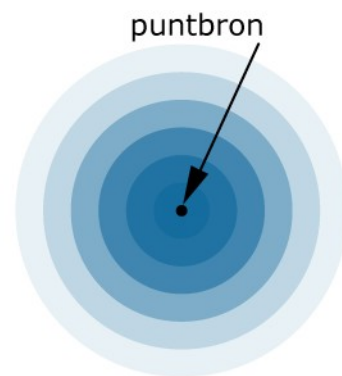
Opgave 23

Beperk je tot een kolom water, met dichtheid ρ , van 1 meter bij 1 meter water, waarvan de bovenkant a meter boven de zeespiegel ("niveau 0") ligt. Wat wordt de potentiële energie dan van deze kolom, uitgedrukt in ρ , g en a ?

Hier hebben we de potentiële energie uitgerekend, direct na de waterspiegelverheffing. Deze energie wordt gedeeltelijk omgezet in kinetische energie, omdat het water "valt" en dus snelheid krijgt. Als de golf eenmaal loopt is er een constante uitwisseling van potentiële en kinetische energie, maar de totale energie blijft (wet van behoud van energie) gelijk. Er wordt geen energie in warmte omgezet, omdat de bewegingsoverdracht vrijwel geheel wrijvingsloos plaats vindt. Alleen wordt de energie verplaatst, omdat de golf de energie doorgeeft. Op deze manier bereikt de energie, die vrijkwam bij de aardbeving en die de tsunami deed ontstaan, in al zijn heftigheid de kusten.



figuur 2



figuur 3

Een lopende golf kan zich op verschillende manieren voortplanten. Als een steen in het water valt, is de verstoring puntvormig, waardoor de golven zich cirkelvormig voortplanten. Is de verstoring echter lijnvormig (denk b.v. aan een watergoot met een "schuiver" aan het begin) dan verplaatst de golf zich loodrecht op de verstoringbron, zodat de golfkammen evenwijdig aan deze lijnvormige verstoring zijn.

We hebben ons vanaf het begin tot deze golven beperkt. Dat was een model, maar het sluit aardig aan bij de werkelijkheid van de tsunami van 26 december 2004: omdat de verstoring bij die tsunami over een breedte van honderden kilometers plaatsvond (zie het begin van hoofdstuk 2), kunnen we de verstoringbron als een lijnbron opvatten.

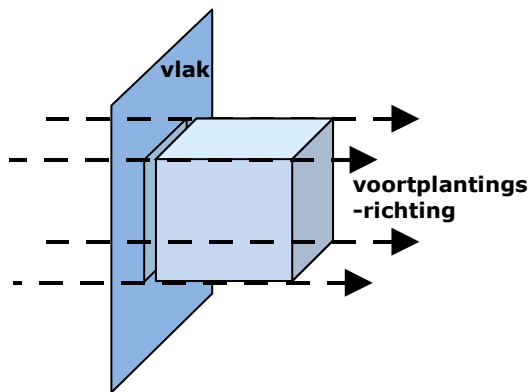
Bij een lopende golf wordt de energie in de voortplantingsrichting dus vrijwel geheel wrijvingsloos doorgegeven. Daarom treedt er geen energieverlies op. Als de verstoringbron een puntbron is, verplaatsen de golven zich cirkelvormig waardoor de energie zich over een steeds groter wordend oppervlak moet verdelen, zodat de energie per m^2 steeds minder wordt (zie figuur 3). (Ga na dat deze omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de straal.)

In **opgave 23** hebben we aangetoond dat de energie per m^2 van een kolom water evenredig is met het kwadraat van de golfhoogte. Het is aannemelijk, dat ook voor de energie in een golf geldt, dat deze evenredig is met het kwadraat van de amplitude ervan.

Bij de rimpelingen in het wateroppervlak, veroorzaakt door een vallende steen zien we ook duidelijk de golfhoogte afnemen, wat in overeenstemming is met de opmerking uit de vorige alinea.

Als de golf veroorzaakt is door een lijnbron treedt er tussen twee vlakken evenwijdig aan de voortplantingsrichting geen energieverlies per m^2 loodrecht op de voortplantingsrichting op (wet van behoud van energie).

Om het verband tussen de golflengte L en de amplitude a van een golf aannemelijk te maken, volgen we de volgende redenering, die een sterke vereenvoudiging is van de werkelijkheid:



Figuur 4

We bekijken de grootte van de energiestroom per tijd per oppervlak loodrecht op de voortplantingsrichting (in de natuurkunde wordt dit *de flux* genoemd) veroorzaakt door de tsunamigolf. Om ons hierbij iets te kunnen voorstellen, denken we aan een vierkant gelegen in een vlak loodrecht op de stroomrichting.

Hoe sneller de golf zich voortplant, hoe "meer" energie per seconde dit oppervlak passeert. Dus de flux is evenredig met de snelheid c .

Zoals we in **opgave 23** hebben gezien, is de energie evenredig met a^2 , dus de hoeveelheid energie die per seconde passeert, is eveneens evenredig met a^2 .

Combineren we deze twee gegevens dan zien we dat de energieflex evenredig is met a^2c .

Omdat er verwaarloosbaar weinig energieverlies optreedt aan wrijving, is in ons geval in eerste benadering de energieflex constant.

Dat wil zeggen: a^2c is constant!

Of equivalent hiermee: de energie in een golf is constant!

Opgave 24

Leid deze equivalentie af.

Opgave 25

Leid met behulp van het resultaat dat a^2c constant is en de formule $c = \sqrt{gh}$ af hoe a afhangt van h .

Opgave 26

Als je onderstaande tabel invult, krijg je een idee hoe een golfhoogte van 1 meter op zee, bij een diepte van 4 km aan land een desastreuze hoogte kan bereiken.

diepte	in m	4000	1000	200	10	1
amplitude	in m	1				



"Kanttekening

Bescherming is dus wel degelijk mogelijk. Vluchten naar hoger gelegen grond zij het een 20 meter hoge heuvel of een betonnen skeletgebouw is de beste raad. Veel tijd om te aarzelen is er niet want op 30 meter diep water snelt de golf altijd nog met 60 kilometer per uur voort. Dit is dan ook de kanttekening die ik zou willen plaatsen bij de ruim verkondigde opinie dat er een tsunami waarschuwingssysteem moet komen. Zo'n systeem bestaat uit drukmeters die op de bodem van de oceaan liggen. Daarmee kan men de golf die aldaar orde 1 meter hoog is opmerken. Er rest de kustbevolking dan nog enkele uren om te vluchten. Dat betekent dat een waarschuwingssysteem wel de mensen redt, maar de economische schade niet kan voorkomen. Na afloop keren de mensen dan terug naar de plaats waar hun dorpen en huizen zijn weggespoeld. Alleen een waarschuwingssysteem helpt dus weinig, men zou ook tsunamibestendig moeten bouwen. Een ander probleem met waarschuwingssystemen is dat zij onvermijdelijk tot valse alarmen aanleiding geven."

Opgave 27

In het hierboven geplaatste stukje uit *Cobouw*, vakblad van de bouwnijverheid, 5 januari 2005, worden golfhoogtes en snelheden genoemd. Ga nu na of deze getallen reëel zijn. Dit stuk is geschreven vanuit het standpunt van een bouwkundig ingenieur. Hoe kun je dat zien, en wat voor commentaar zou jij op de gegevens waarmee hij werkt willen geven nu je veel te weten bent gekomen over het verschijnsel van de tsunami?