Wiskunde in wetenschap
vwo D

Modelleren

Startmodule wiskundig modelleren

universiteit Twente

Deze startmodule is de eerste van een serie modules die vooralsnog bestaat uit:

- Startmodule: Modelleren
- Wave en golven
- Golven en tsunami
- Verkeer en files
- Krommen en knikken

Het Excel-bestand dat is gebruikt bij het model "Griepepidemie" is te downloaden vanaf de website van het wiskunde D steunpunt van de UTwente.
Een spreadsheet-programma zoals Excel is bij uitstek geschikt om modellen door te rekenen. Practica om het werken met Excel te leren zijn te vinden op www.math4all.nl > Practica > Werken met Excel.

Versie: januari 2008

1. Modelleren, wat is dat?

Wetenschap wordt gemaakt door nieuwsgierige mensen die om zich heen kijken en zich dan vragen stellen over wat ze waarnemen. Nu is de werkelijkheid bijna altijd bijzonder ingewikkeld, te ingewikkeld om met alle details rekening te kunnen houden. En dus houd je met (in jouw ogen) onbelangrijke details ook gewoon geen rekening. Zodra je iets waarneemt vereenvoudig je (waarschijnlijk onbewust) de werkelijke situatie.

Een **model** is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van een bepaald verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model noem je **modelleren**.

Deze eerste module uit de serie "Wiskunde in wetenschap" is bedoeld om je een idee te geven van het proces van modelleren. Met echte meer grootschalige modellen kun je in vervolgmodules kennismaken.

Kijkafstand

Iemand staat op een vlot midden op een rustige (vlakke) zee. Hoe ver kan hij kijken?

Opgave 1
Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

In de volgende opgaven word je aan de hand van hulpvragen naar de oplossing geleid.

Opgave 2
a) Waarom kan hij niet oneindig ver kijken ook als er geen obstakels in de weg staan?
b) Maak een schets van de situatie. Houd daarbij rekening met de vorm van het aardoppervlak.
c) Hoe heb je in je figuur de afstand die hij kan kijken aangegeven?
d) Welke vereenvoudigingen heb je nu al toegepast?

Waarschijnlijk bestaat je figuur uit een (deel van een) cirkel die een doorsnede van het aardoppervlak voorstelt met daarop een lijnstukje dat de persoon die kijkt voorstelt. Als dat niet zo is, maak dan alsnog een dergelijke figuur.
Noem het middelpunt van de cirkel M en het lijnstuk (dat degene die kijkt voorstelt) PQ, met Q op het aardoppervlak.

e) Waarom moet PQ liggen op het verlengde van MQ?
f) Punt R is een punt op het aardoppervlak dat de persoon die kijkt nog net kan zien. Geef zo'n punt in je figuur aan.
g) Welke eigenschap heeft driehoek MPR? Probeer daar een verklaring voor te vinden.
h) De omtrek van de aarde is 40.000 km. Van welke lijnstukken kun je nu de lengte berekenen?

Opgave 3
Iemand doet nu het volgende voorstel om het probleem op te lossen:
Kies voor de lengte van *PQ* (de lengte van de persoon die kijkt) een bepaalde waarde, bijvoorbeeld 1,80 m.
Verder is de kijkafstand *PR* en die geef je de letter *a*.
Vervolgens pas je de stelling van Pythagoras toe in driehoek *MPR*.

a) Je kunt daarmee *a* uitrekenen. Doe dat.

b) De lengte van de persoon die kijkt hoeft niet 1,80 m te zijn. Hoe kun je daarmee rekening houden?

c) Probeer nu een volledige oplossing van het probleem te beschrijven. Je kunt daarbij werken met variabelen en een formule.
Maar je kunt ook werken met de computer en een rekenblad als Excel.

Opgave 4
Iemand anders doet een iets ander voorstel:
Kies voor de lengte van *PQ* (de lengte van de persoon die kijkt) de variabele *h*.
Verder is de kijkafstand de lengte van de boog *QR* en die geef je de letter *a*.
De lengte van die boog wordt bepaald door de grootte van hoek *QMR*. En die kun je uitrekenen in driehoek *MPR*.

a) Beschrijf nu hoe je *a* kunt berekenen.
Maak er eventueel een rekenblad in Excel voor.

b) Waarom is nu het probleem opgelost?

c) Welke van beide modellen (zie opgaven 3 en 4) vind je het beste?

Zwemmer in nood

Iemand staat op het strand aan de waterlijn. Schuin voor zich ziet hij een zwemmer in nood. Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden? Springt hij meteen in het water of loopt hij eerst een stuk langs het strand?

Opgave 5
Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

In de volgende opgaven word je aan de hand van hulpvragen naar de oplossing geleid.

Opgave 6

a) Waarom is het waarschijnlijk verstandig om eerst een stuk langs het strand te lopen?

b) Probeer een schets te maken van de situatie. Neem aan dat je vlak langs de waterlijn kunt lopen en dat die waterlijn recht is.

c) Doe eens een paar aannames over afstanden en snelheden en geef die in je figuur aan als dat mogelijk is.

d) Om berekeningen te kunnen maken heb je vaak rechthoekige driehoeken nodig. Kun je die in je figuur vinden?

Opgave 7

Iemand heeft een figuur gemaakt waarbij punt *A* de persoon aan de waterlijn voorstelt, punt *Z* de zwemmer in nood en *ABZ* een rechthoekige driehoek is waarvan *AB* de waterlijn voorstelt. Hij neemt aan dat *AB* = 400 m en dat *BZ* = 200 m. De loopsnelheid neemt hij (bij hard lopen) 10 km/uur en de zwemsnelheid 2 km/uur.

a) Hoeveel tijd kost dan het bereiken van de zwemmer als er alleen wordt gezwommen?

b) En hoeveel tijd kost het bereiken van de zwemmer als het hele stuk *AB* eerst wordt gelopen en dan *BZ* wordt gezwommen?

c) Denk je dat er een keuze mogelijk is die minder tijd kost? Hoe dan? Kun je nu het probleem verder zelf oplossen?

Opgave 8

Misschien heb je bij de vorige opgave al bedacht dat een kortere afstand wordt bereikt als de persoon bij *A* niet helemaal van *A* naar *B* loopt, maar slechts een deel *AP* van die afstand.

a) Kies een waarde voor *AP* en bereken dan de tijd die nodig is om de zwemmer te bereiken.

b) Beschrijf de rekenprocedure als je verschillende waarden voor *AP* wilt kunnen kiezen.

c) Zijn de aannames voor de lengtes en de afstanden handig gekozen? Kun je dit verbeteren zonder het rekenmodel te verknoeien?

Opgave 9

Je kunt ook werken met een variabele voor de lengte van *AP*. Noem die lengte bijvoorbeeld x.

a) Stel een formule op voor de totale tijd die nodig is om *Z* te bereiken vanuit *A*.

b) Hoe kun je het probleem verder oplossen?

c) Hoe controleer je het antwoord?

Opgave 10

a) Probeer nu het complete model (inclusief de aannames) duidelijk te beschrijven.

b) Probeer het model nog verbeteren door de lengtes en snelheden ook variabel te maken. Je kunt dit doen door de formules aan te passen.
Je kunt dit ook doen met behulp van een rekenblad in Excel.

Griepepidemie

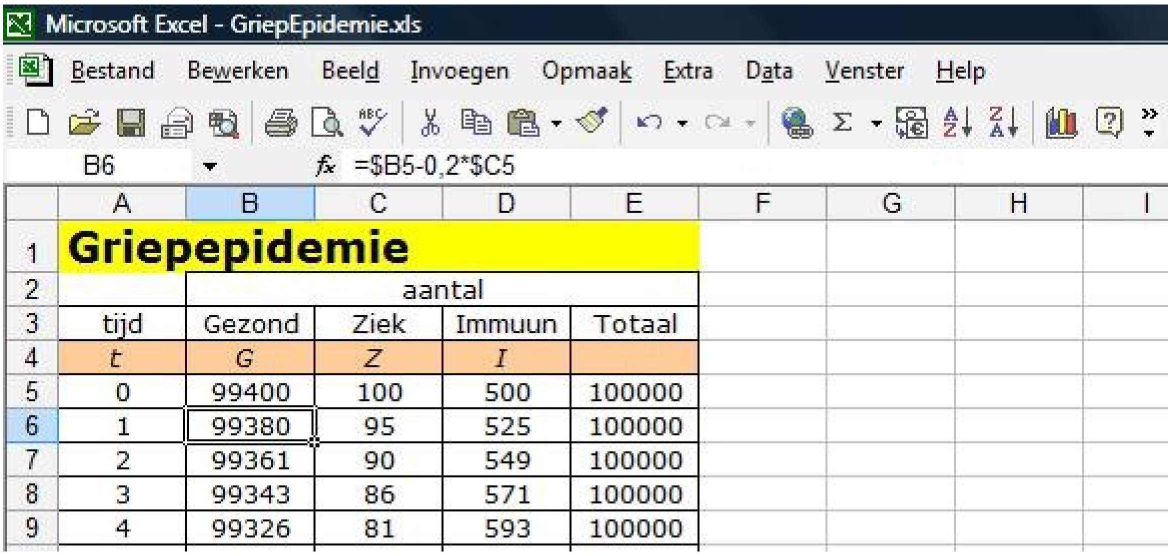
Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt is er sprake van gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieke mensen steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is 4 dagen, daarna ben je geruime tijd immuun geworden. Je begint op een bepaalde dag met 100.000 personen waarvan er 100 ziek en 500 immuun zijn. Hoe verloopt het aantal zieken per dag, hoeveel is dit maximaal?
(Zie ook www.degrotegriepmeting.nl)

Opgave 11
Probeer zelf een model voor het ziekteverloop te verzinnen.
Schakel eventueel de computer en het rekenblad Excel in.

In de volgende opgaven word je aan de hand van hulpvragen naar een oplossing geleid.

Opgave 12
a) Welke drie grootheden kent dit probleem behalve de tijd in dagen?
b) Er bestaan verbanden tussen die drie variabelen. Kun je die weergeven in een schema (met pijlen)?
c) Waarom wordt gemiddeld elke dag 25% van de zieken weer gezond (en dus immuun)?
d) Neem aan, dat dagelijks een bepaald percentage van de zieken een gezond iemand aansteekt. Kies een vast percentage. Geef de percentages in je pijlenschema weer.
e) Heb je bij je eigen oplossing ook zo’n aanname gedaan?
Werk nu verder met de aanname die in d is gedaan.
Op t = 0 heb je 5000 zieken, 10.000 personen die immuun zijn en dus 85.000 gezonden. Hierin is t de tijd in dagen.
f) Hoeveel zijn dat er op t = 1 en op t = 2?
g) Hoe reken je nu verder?
h) Krijg je realistische uitkomsten?

Opgave 13
Iemand bedenkt nu het volgende:
$G(t)$ is het aantal gezonde personen op zeker tijdstip t.
$Z(t)$ is het aantal zieken en $I(t)$ is het aantal immune personen.
Een dag later zit je op tijdstip $t + 1$.
Dan is: $G(t + 1) = G(t) - 0{,}2 \times Z(t)$.
a) Leg deze formule uit. Hoe groot is bij hem de kans dat een zieke iemand anders ziek maakt?
b) Welke formule geldt nu voor $Z(t + 1)$ als elke dag 25% van de zieken beter wordt en er gezonde mensen ziek worden volgens de voorgaande formule?
c) Welke formule geldt er voor $I(t + 1)$?
d) In een rekenblad in Excel kun je dat in formules verwerken. Bekijk de figuur.



Microsoft Excel - GriepEpidemie.xls

Bestand Bewerken Beeld Invoegen Opmaak Extra Data Venster Help

B6 f_x =$B5-0,2*$C5

	A	B	C	D	E
1	**Griepepidemie**				
2		aantal			
3	tijd	Gezond	Ziek	Immuun	Totaal
4	*t*	*G*	*Z*	*I*	
5	0	99400	100	500	100000
6	1	99380	95	525	100000
7	2	99361	90	549	100000
8	3	99343	86	571	100000
9	4	99326	81	593	100000

In cel B6 staat de formule =$B5–0,2*$C5.
Leg uit dat dit overeen komt met de formule $G(t+1) = G(t) - 0{,}2 \times Z(t)$.
Wat staat er in cel C6? En in cel D6?

e) Hoe gaat de griepepidemie verlopen? Maak een tabel met je grafische rekenmachine.
Gebruik eventueel het rekenblad Excel.

f) Hoe zit het nu met het maximale aantal zieken? Lijkt het model erg realistisch?

Opgave 14

Bij nader inzien lijkt het beschreven model niet goed te zijn: het aantal personen dat ziek wordt gemaakt door iemand die al ziek is hangt natuurlijk vooral af van het aantal gezonde mensen (alleen die kunnen nog ziek worden). Dat zal geen vast percentage van het aantal zieken zijn. Dit hangt eerder af van het percentage gezonde mensen waarmee een zieke in contact komt en de kans dat dan ook de ziekte wordt overgedragen.

a) Het rekenblad in Excel wordt daarom wat aangepast.
In cel C6 komt nu =$C5-0,25*$C5+0,02*0,5*$B5.
Hieruit blijkt dat de kans dat de ziekte wordt overgedragen van een zieke op iemand die gezond is op 50% is gesteld. Hoe groot is het percentage gezonde mensen waarmee een zieke in contact komt volgens dit model?

b) Schrijf de drie bijbehorende modelformules op.

c) Hoe gaat de griepepidemie verlopen? Maak een tabel met je grafische rekenmachine of met het rekenblad Excel.

d) Lijkt dit model realistischer? Of zou je nog aanpassingen willen aanbrengen? En zo ja, welke dan?

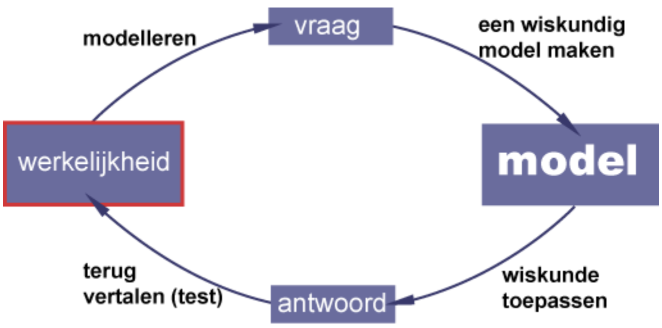
e) Kun je een manier verzinnen om het model te testen?

2. Modelleercyclus

In de opgaven in de voorgaande paragraaf heb je telkens de werkelijkheid vereenvoudigd. Bijvoorbeeld heb je aangenomen dat:

- de aarde zuiver rond is;
- een persoon kan worden voorgesteld door een lijnstuk of een punt;
- de waterlijn zuiver recht is;
- het aantal mensen dat door iemand die de griep heeft wordt aangestoken een vast percentage is;
- etcetera.

Je maakt vervolgens een wiskundig model door gebruik te maken van kwantificeerbare grootheden (dat zijn grootheden die door getallen kunnen worden uitgedrukt) en de verbanden ertussen. De conclusies die je trekt na berekeningen in dat wiskundige model vertaal je terug naar de werkelijkheid. Als het resultaat niet bevredigend is moet je het model aanpassen en opnieuw de modelleercyclus doorlopen, bekijk het schema.



Van werkelijkheid naar model

Stap 1: Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een **vraag** die je wilt oplossen: de **probleemstelling**. Je bedenkt welke **grootheden**, welke **variabelen** een rol spelen.

Stap 2: Je vereenvoudigt de werkelijkheid door **aannames** te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de situatie of je probleemstelling past. Geef duidelijke **definities** van de grootheden waarmee je gaat werken en waartussen je **verbanden** gaat zoeken. Je moet je ook goed realiseren (opschrijven desnoods) waarom je bepaalde dingen weglaat. (Zijn er verborgen aannames in je lijst? Het bedenken van extreme gevallen kan je helpen.)

Van model terug naar werkelijkheid

Stap 3: Je zoekt het **antwoord** op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. De **extreme gevallen** kunnen je helpen. Het antwoord kan de oplossing van een probleem (de vraag) zijn, maar ook een beschrijving van een bepaalde situatie.

Stap 4: Je kijkt of je antwoord wel past bij de **werkelijkheid**. Je moet als het ware je nog wiskundige antwoord 'terug vertalen'. Als dat kan ontwerp je ook een **test**. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld. In dat laatste geval doorloop je de cyclus opnieuw. (In toegepaste wiskunde blijkt een model vaak verschillende keren bijgesteld te zijn.)

Terugblikken

Kijk nu terug naar de opgaven in paragraaf 1.
Probeer de modelleercyclus te herkennen.

Opgave 15

Bekijk de opgaven bij "Kijkafstand" in paragraaf 1 nog eens.

a) Welke **grootheden** kende dit probleem?
Wat is het verschil tussen een grootheid en een **variabele**?
b) Welke **aannames** heb je allemaal gedaan?
c) Hoe heb je de kijkafstand in een schets aangegeven? Welke **definitie** van kijkafstand geef je daarmee? (Er zijn twee mogelijkheden bekeken.)
d) Heb je de kijkafstand van tevoren kunnen schatten? Welk nut heeft zo'n schatting?
e) Waarom is de vraag naar de eigenschappen van driehoek *MPR* heel belangrijk?
f) Over welke stap van de modelleercyclus gingen de voorgaande vragen?
g) Hoe gebruik je de rechthoekige driehoek in de mogelijke uitwerkingen?
h) Welke voorkennis had je nodig?
i) Over welke stap in de modelcyclus gingen de vragen g en h?
j) Hoe maak je de uitwerking zo algemeen mogelijk (verschillende kijkhoogtes)?
k) Wat doe je in de vierde stap van de modelleercyclus bij dit probleem?
l) Hoe kun je het model van de kijkafstand **testen** in de praktijk?

Opgave 16

Bekijk de opgaven bij "Zwemmer in nood" nog eens.

a) Welke **aannames** heb je gedaan?
b) Hoe heb je die in de schets van de situatie verwerkt?
c) Welke extreme gevallen heb je eerst doorgerekend?
d) Welke **variabele** heb je ingevoerd? Kon je ook een andere variabele kiezen?
e) Welke **verbanden** tussen de variabelen heb je gevonden?
f) Kun je het antwoord controleren? Beschrijf een mogelijke **test** (zonder dat je een zwemmer in nood moet inschakelen)?
g) Maak nu een overzicht van wat je bij elke stap van de modelcyclus hebt gedaan om dit probleem op te lossen.

Opgave 17

Bekijk de opgaven bij "Griepepidemie" nog eens.

a) Welke **aannames** heb je gedaan?
b) Waarom is het nuttig om een graaf (een schema met pijlen) kunnen maken van de situatie?

c) In het eerste model (opgave 13) werd er van uit gegaan dat dagelijks een bepaald (vast) percentage van de zieken een gezond iemand ziek maakt. Hoe zit dat in het model verwerkt?

d) Waarom lijkt die aanname niet te kloppen op grond van de resultaten van opgave 13? Is er nog een andere reden waarom die aanname niet zal kloppen?

e) Hoe wordt het model bijgesteld? Wordt daarbij de gehele modelcyclus opnieuw doorlopen?

f) Kun je een manier bedenken om het model verder te **testen**?

g) Maak nu een overzicht van wat je bij elke stap van de modelcyclus hebt gedaan om dit probleem op te lossen.

Hoe snel beweeg je als je stilstaat?

Je staat ergens op aarde stil, bijvoorbeeld in het centrum van Amsterdam.
Hoe snel beweeg je als gevolg van het draaien van de aarde?

Opgave 18
Stel hiervoor zelf een model op.
Maak daarbij gebruik van de modelcyclus. Probeer een manier te verzinnen om het model te testen.

Trein op schaal

Je kent ze wel: de treintjes van Märklin of Fleischmann. Je ziet er hier ééntje die staat op de drijfstang van hetzelfde origineel.
Neem aan dat een echte loc met een snelheid van 60 km/h rijdt.
Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?

Opgave 19
Los dit probleem op volgens de modelcyclus.

3. Jezelf vragen leren stellen

Het opstellen van een wiskundig model is vaak nog een heel gepuzzel.

Het is belangrijk om actief te zijn: stel jezelf passende vragen en probeer die te beantwoorden. Daarbij moet je proberen te schematiseren en na te denken over de variabelen. In de voorgaande paragraaf is dat vaak voor je gedaan door hulpvragen te stellen. Een **serie mogelijke hulpvragen** vind je als bijlage achter in deze module.
Die lijst met vragen is beslist niet compleet: er zijn nog wel andere te verzinnen. Bovendien leer je hem natuurlijk niet uit het hoofd. Je houdt de modelleercyclus in de gaten en verzint zelf verstandige vragen.
Ook bij het beschrijven van de oplossing is het nuttig om steeds op te schrijven welke vragen je jezelf hebt gesteld en welke antwoorden (en aannames) dat tot gevolg had. Volg je dan de stappen van de modelcyclus, dan kom je als vanzelf tot een leesbare uitwerking van je modelleersituatie.

Fabriekshal

Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van wel 2400 m^2. Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en parkeerruimte, aan beide zijden en aan de achterkant stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?

Opgave 20: Van werkelijkheid naar probleemsituatie

a) Kun je een tekening maken? Zet de gegevens er zoveel mogelijk in.
b) Welke aannames heb je dan al gedaan?
c) Om welke grootheden gaat het? Welke daarvan zijn variabel?
Hier moet je keuzes maken. Je kunt bijvoorbeeld kiezen voor de lengte en de breedte van het terrein als grootheden, maar ook voor de lengte en de breedte van de fabriekshal zelf. De keuze heeft gevolgen voor het verdere rekenmodel. Verder spelen er twee oppervlaktes een rol.
d) Bestaat er een verband tussen de gekozen grootheden?

Opgave 21: Van probleemsituatie naar wiskundig model

Je probeert het probleem te vertalen in een wiskundig model.
a) Probeer eerst een getallenvoorbeeld door te rekenen? Kies bijvoorbeeld een getal voor de lengte (van fabriekshal of terrein) en kijk wat je allemaal kunt berekenen.
b) Probeer nog een paar getallenvoorbeelden, maak eventueel een tabel (in Excel?).
c) Kloppen je eenheden met elkaar?
d) Kun je uit de manier van rekenen aan de voorbeelden formules afleiden voor de verbanden tussen de variabelen? Kun je een formule opstellen voor de oppervlakte van het terrein?
e) Kun je de uitkomst van te voren schatten?

Opgave 22: Van wiskundig model naar uitwerking
Als alles goed is gegaan heb je nu een wiskundig model in de vorm van een formule voor de oppervlakte van het terrein.

a) Welke wiskundige technieken ken je om een minimum te bepalen?
b) Als je grafisch te werk gaat hoe kun je er dan voor zorgen dat je de grafiek goed in beeld krijgt?
c) Bepaal nu de minimale waarde van de oppervlakte.
d) Bepaal de waarde voor de lengte en de breedte van het terrein die bij de minimale oppervlakte horen.
e) Klopt het antwoord met de schatting?

Opgave 23: Van uitwerking terug naar de werkelijkheid

a) Hoe kun je het antwoord testen?
b) Welk advies formuleer je voor de fabrikant?

Opgave 24
Schrijf tenslotte een leesbare uitwerking van je modelleersituatie.

Benzine of diesel?

Bij de aanschaf van een nieuwe auto heeft iemand de keuze uit twee uitvoeringen: een dieselversie en een benzineversie. Daar bestaat een groot prijsverschil tussen, bovendien is de wegenbelasting verschillend en ook de brandstofprijzen verschillen.
Stel een geschikt model op en geef een gemotiveerd advies.

Opgave 25
Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.
Zoek eventueel gegevens via internet.

Migratie

In een bepaald land is sprake van een trek van de bevolking van het platteland naar de stad. In een eenvoudig model wordt geen rekening gehouden met de instroom en de uitstroom van dit land. Ontwerp zo’n model en laat daarmee zien wat er in het bewuste land gebeurt met de verhouding tussen het aantal mensen in de stad en dat op het platteland.

Opgave 26
Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.
Werk eventueel met Excel.

Slinger

Een kogel aan het eind van een opgehangen draad maakt een periodieke slingerbeweging als je de kogel een (kleine) uitwijking geeft.
Je probeert een formule te vinden voor de slingerperiode. Bepaal eerst de eenheden (dimensies) van de verschillende grootheden in je model. Probeer dan een simpel verband voor de periode af te leiden waarbij de dimensies in ieder geval kloppen.

Opgave 27

Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.

4. Enkele modelsituaties

Eigenlijk weet je nu alles wat nodig is als basis voor het modelleren. Eigen creativiteit is belangrijk, jezelf en elkaar vragen leren stellen is heel belangrijk, de grote lijn is de modelcyclus en de rest is volharding…

Hier vind je enkele modelsituaties waarin je zelf (samen met anderen) moet zoeken naar de oplossing. Die oplossing schrijf je dan zo op dat iedere willekeurige voorbijganger die kan begrijpen:

- alle stappen moeten duidelijk zijn aangegeven (gebruik de stappen van de modelleercyclus);
- alle aannames en vereenvoudigingen moeten duidelijk zijn verwoord;
- de keuzes van de grootheden en de eenheden moeten duidelijk worden weergegeven;
- alle berekeningen moeten helder worden weergegeven;
- de vergelijking met de werkelijkheid moet worden gemaakt.

Je noemt dit een **leesbare uitwerking** van de oplossing.
Bij de volgende probleemsituaties wordt zo'n leesbare uitwerking verwacht.
Werk met Excel als je daar handig mee bent.

Straatverlichting

Er wordt een nieuwe weg aangelegd. Hoe ontwerp je zo goedkoop mogelijk de straatverlichting, terwijl je er toch voor zorgt dat de weg goed is verlicht?

Opgave 28

Ontwerp een model voor de straatverlichting. Ga daarbij van de volgende gegevens uit.
De lichtsterkte S (in watt per m^2) is recht evenredig met het vermogen P (in watt) van de lichtbron en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand (in m) tot de lichtbron. (Kun je verklaren waarom dit zo is?)
Je verlicht de weg met straatlantaarns met een bepaald vermogen, een bepaalde hoogte en een bepaalde onderlinge afstand, neem aan dat die niet variëren.
Wettelijk is vastgelegd dat de lichtsterkte op elk punt van een weg moet liggen tussen 10 en 320 Watt/m^2.

Thuiswerkers

In de rotanmeubelenindustrie werd vroeger veel gebruik gemaakt van zogenaamde thuiswerkers. Dat waren mensen die in de avonduren zittingen van stoelen invlochten met pitriet. Stel je voor dat een rotanmeubelenbedrijf van die thuiswerkers in dienst heeft. Ze laten twee soorten stoelen invlechten door deze mensen en brengen en halen die stoelen met een bestelbusje. De tijd die nodig is voor invlechten verschilt per soort stoel. De winst die het bedrijf maakt verschilt ook per soort stoel.

Bij welke wekelijkse productie is de winst op deze stoelen maximaal?

Opgave 29

Neem eerst bijvoorbeeld aan dat er 11 thuiswerkers in dienst zijn, dat er in het busje 30 stoelen passen, dat soort A één avond invlechten betekent en soort B twee avonden. Neem ook aan dat elke thuiswerker 4 avonden per week werkt, dat de soort A een winst van 200 euro per stoel en soort B een winst van 300 euro per stoel oplevert.
Ga daarna het model algemener maken.

Vissen in de Grevelingen

De afsluiting van de Grevelingen had voor de visstand grote gevolgen. Om die gevolgen in kaart te brengen werden wiskundige modellen ontwikkeld. Onder andere voor de ontwikkeling van de scholpopulatie. Om een model te kunnen opstellen werden deze aannames gedaan:

- **jaarlijks komen er 5 miljoen larven het Grevelingenmeer binnen;**
- **jaarlijks komen 200.000 volwassen schollen (één jaar of ouder) het Grevelingenmeer binnen;**
- **90% van die larven sterven als jonge vissen (dus voordat ze 1 jaar zijn);**
- **33% van de volwassen vissen sterven jaarlijks.**

Opgave 30

Stel op grond hiervan een model op voor de ontwikkeling van de scholpopulatie.
Werk met Excel of de grafische rekenmachine.

De beste goot

Voor irrigatie van bouwgronden worden goten gebruikt. Die goten worden gemaakt door een zinken plaat van 50 cm breed en 2,5 m lang in een bepaalde vorm te buigen. De dwarsdoorsnede kan een rechthoek zijn, een symmetrisch trapezium of een halve cirkel. De lengte van elk gootstuk is 2,5 m, de breedte wordt gebogen.
Welke vorm en afmetingen krijgt een goot die zoveel mogelijk water kan bevatten?

Opgave 31

Los dit probleem voor de fabrikant van dergelijke goten op.

Bijlage: Mogelijke hulpvragen bij modelleren

Stap 1: Van werkelijkheid naar probleemsituatie

Eigenlijk is dit vaak de moeilijkste stap.

- Wat wordt er gevraagd, kan ik dat in eigen woorden zeggen?
- Heb ik alle gegevens?
- Welke vereenvoudigingen kan ik maken?
- Kan ik een schema, een tekening maken?
- Welke aannames kan ik doen?
- Welke grootheden spelen een rol en welke zijn variabel?
- Welke verbanden zijn er tussen de variabelen?

Stap 2: Van probleemsituatie naar wiskundig model

Je probeert het probleem te vertalen in een wiskundig model.

- Zijn de variabelen kwantificeerbaar?
- Kan ik een getallenvoorbeeld maken? Extreme situaties doorrekenen?
- Kan ik de verbanden (tussen kwantificeerbare grootheden) uitdrukken in wiskundige formules. Kloppen de eenheden met elkaar?
- Heb ik alle gegevens gebruikt, of zijn er nog verdere gegevens?
- Kan ik de uitkomst van te voren schatten?

Stap 3: Van wiskundig model naar uitwerking

- Is het een bekend model, of ken ik een model dat er op lijkt?
- Welke wiskundige technieken zal ik gaan gebruiken?

Je gaat nu wiskundige bewerkingen uitvoeren. Controleer elke stap op juistheid en probeer die juistheid aan te tonen. Werk zo overzichtelijk mogelijk. Je gaat na of het probleem volledig is opgelost en of je er iets van moet onthouden voor volgende problemen. Stel jezelf vragen als:

- Klopt het resultaat met mijn schatting?
- Hoe kan ik het resultaat verder nog controleren?
- Ben ik op de goede manier met eventuele afrondingen omgegaan?
- Heb ik de juiste eenheden gebruikt?

Stap 4: Van uitwerking terug naar de werkelijkheid

Je vertaalt de uitwerking die je hebt gevonden terug naar de werkelijkheid. Bedenk bijvoorbeeld een manier om het model te testen. Als het resultaat niet bevredigend is, stel je het model bij en doorloop je de modelleercyclus opnieuw.